대학수학능력시험 이과형 수학 고난이도 해설

Donghui Kim

2018년 4월 27일

1 기하와 벡터

1. [2017년 11월 학평] 좌표공간에 세 점 $O(0,0,0)$, $A(1,0,0)$, $B(0,0,2)$가 있다. 점 P가 $\overrightarrow{\mathrm{OB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}} = 0$, $OP \leq 4$를 만족하며 움직일 때,

$$PQ = 1,\ \overrightarrow{\mathrm{PQ}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

을 만족시키는 점 Q에 대하여 BQ의 최댓값과 최솟값을 구하여라.

2. [2018학년도 수능 29번]좌표공간에 구 $x^2+y^2+z^2=6$이 평면 $x+2z-5=0$과 만나서 생기는 원 C가 있다. 원 C의 위의 점 중 y좌표가 최소인 점을 P라 하고, 점 P에서 xy평면에 내린 수선의 발을 Q라 하자. 원 C위를 움직이는 점 X에 대하여 $\left|\overrightarrow{\mathrm{PX}} + \overrightarrow{\mathrm{QX}}\right|^2$의 최댓값은 $a+b\sqrt{30}$이다. $10(a+b)$의 값을 구하시오. (단, a와 b는 유리수이다.)

2 미분과 적분

3. [2018학년도 수능 21번] 양수 t에 대하여 구간 $[1,\infty)$에서 정의된 함수 $f(x)$가

$$f(x) = \begin{cases} \ln x & (1 \leq x < c) \\ -t + \ln x & (x \geq c) \end{cases}$$

일 때, 다음 조건을 만족시키는 일차함수 $g(x)$ 중에서 직선 $y=g(x)$ 의 기울기의 최솟값을 $h(t)$ 라 하자.

1 이상의 모든 실수 x 에 대하여 $(x-c)\{g(x)-f(x)\} \geq 0$ 이다.

미분가능한 함수 $h(t)$ 에 대하여 양수 a 가 $h(a) = \frac{1}{e+2}$ 을 만족시킨다. $h'\left(\frac{1}{2e}\right) \times h'(a)$ 의 값은?

① $\dfrac{1}{(e+1)^2}$ ② $\dfrac{1}{e(e+1)}$ ③ $\dfrac{1}{e^2}$
④ $\dfrac{1}{(e-1)(e+1)}$ ⑤ $\dfrac{1}{e(e-1)}$

4. [2018학년도 수능 30번]실수 t 에 대하여 함수 $f(x)$ 를

$$f(x) = \begin{cases} 1-|x-t| & (|x-t| \leq 1) \\ 0 & (|x-t| > 1) \end{cases}$$

이라 할 때, 어떤 홀수 k 에 대하여 함수

$$g(t) = \int_k^{k+8} f(x)\cos(\pi x)dx$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

함수 $g(t)$ 가 $t=\alpha$ 에서 극소이고 $g(\alpha)<0$ 인 모든 α 를 작은 수부터 크기 순으로 나열한 것을 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ (m 은 자연수) 라 할 때, $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 45$ 이다.

$k - \pi^2 \sum_{i=1}^{m} g(\alpha_i)$ 의 값을 구하시오.

Notes

1. 최대 : $2\sqrt{5}+1$, 최소 : $\frac{3}{2}$. 점 P는 xy평면이에 있으며 중심은 원점 반지름의 길이가 4인 원의 경계 및 내부점이다. 또 $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$와 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$가 이루는 각의 크기를 θ라 하면 $0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{6}$. 따라서 P를 고정하면 Q는 구 위에서 단면이 작은 활꼴의 모양위에 있는 것으로 나온다.

$\overline{\mathrm{BQ}}$가 최대이려면 $P = C(4,0,0)$일 때 B, C, Q가 일직선상에 올 때이다.

최소는 $P = D\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, 0\right)$일 때 Q는 z축 위에 있을 때이다. 따라서 최솟값은 $\frac{3}{2}$. □

2. 원점에서 주어진 평면 $\alpha : x+2z-5=0$ 까지 거리는 $d=\sqrt{5}$이며, 따라서 원의 반지름 r은 $r=\sqrt{6-5}=1$을 만족한다.

또한, 판별식에서 $-1 \le y \le 1$이므로 점 P의 y좌표는 -1이다. 곧 $P(1,-1,2)$과 $Q(1,-1,0)$를 얻을 수 있다. 또한, $y=-1$, $y=1$에서 원위의 두 점은 지름의 양 끝점이 되므로, 원의 중심은 $C(1,0,2)$이다.

$$\begin{aligned} S = & \left|\overrightarrow{\mathrm{PX}} + \overrightarrow{\mathrm{QX}}\right|^2 \\ = & \left|2\overrightarrow{\mathrm{PX}} + \overrightarrow{\mathrm{QP}}\right|^2 \\ = & \left|\overrightarrow{\mathrm{QP}} + 2\overrightarrow{\mathrm{PC}} + 2\overrightarrow{\mathrm{CX}}\right| \end{aligned}$$

이제 $\mathbf{u} = \overrightarrow{\mathrm{QP}} + 2\overrightarrow{\mathrm{PC}}$, $\mathbf{v} = 2\overrightarrow{\mathrm{CX}}$라 하자. $\mathbf{u}$와 $\mathbf{v}$가 이루는 각의 크기를 θ라 하고, 각 벡터의 크기를 u, v라 할 때,

$$S = u^2 + v^2 + 2uv\cos\theta$$

$u = |\langle 0,2,2\rangle| = 2\sqrt{2}$, $v = 2r = 2$. 또한, $\mathbf{u}$와 평면 α가 이루는 각의 크기를 θ_0라 할 때, $\cos\theta \le \cos\theta_0$이며, 등호는 $\mathbf{u}$와 $\mathbf{v}$가 이루는 각의 크기가 가장 작을 때 성립한다. $\mathbf{u}$와 α의 법선벡터가 이루는 각의 크기를 θ_1이라 하면,

$$\cos\theta_0 = \sin\theta_1 = \sqrt{1-\cos^2\theta_1} = \sqrt{1-\left(\frac{4}{2\sqrt{2}\sqrt{5}}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{5}}$$

따라서

$$S \le 8 + 4 + 2\cdot 2\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{\frac{3}{5}} = 12 + \frac{8}{5}\sqrt{30}$$

따라서 답은 $10\left(12+\frac{8}{5}\right) = 136$이다. □

3. $g(x)$가 만족하는 조건을 정리해 보면,

$$\begin{cases} g(x) \le \ln x & 1 \le x < e \\ -t + \ln x \le g(x) & e < x \end{cases}$$

$\ln x$는 위로 볼록하고 증가한다. 또, $\left.\frac{\mathrm{d}\ln x}{\mathrm{d}\,x}\right|_{x=e} = \frac{1}{e}$이므로 $A(1, f(1))$, $B(e, f(e))$에 대하여 $\overline{\mathrm{AB}}$의 기울기가 $\frac{1}{e}$보다 큰지 작은지에 따라서 $h(t)$의 모양이 달라진다. 그런데 $\overline{\mathrm{AB}}$의 기울기 가 $\frac{1}{e}$보다 같거나 작은 조건은 $t \le \frac{1}{e}$이다.

$t \le \frac{1}{e}$ 일 때는 $y = g(x)$ 의 기울기는 $\overline{\mathrm{AB}}$ 의 기울기와 같다. 따라서,

$$h(t) = \frac{1-t}{e-1}, h'(t) = \frac{1}{1-e}$$

이제 $t > \frac{1}{e}$ 일 때는 $y = g(x)$ 가 $x > e$ 인 곳에서 $y = f(x)$ 의 그래프와 접하며, $(1, f(1))$ 을 지난다. 이 접점의 좌표를 $(p, -t + \ln p)$ 라 하면,

$$\frac{1}{p} = \frac{-t + \ln p}{p-1},\ h(t) = \frac{1}{p}$$

곧,

$$t = h - 1 - \ln h,\ h' = \frac{h}{h-1}$$

따라서 $h(a) = \frac{1}{e+2}$ 이면, $\frac{1}{e+2} < \frac{1}{e}$ 이므로 $a > \frac{1}{e}$ 이고 이 때는 $h'(a) = \frac{h(a)}{h(a)-1} = -\frac{1}{e+1}$. 따라서,

$$h'\left(\frac{1}{2e}\right) \times h'(a) = \frac{1}{e^2 - 1}$$

따라서 정답은 ④번이다. □

4. $k = 2n + 1$ 이라 하자. 또,

$$f_0(x) = \begin{cases} 1 - |x| & (|x| \le 1) \\ 0 & (|x| > 1) \end{cases}$$

이라 하면, $f(x) = f_0(x - t)$ 이다.

$$g_1(t) = \int_1^9 f(x)\cos(\pi x)dx = \int_1^9 f_0(x-t)\cos(\pi x)dx$$

라고 하자. 그러면

$$\begin{aligned} g(t) &= \int_k^{k+8} f(x)\cos(\pi x)dx, x = y + 2n \\ &= \int_1^9 f(y+2n)\cos(\pi y)dy \\ &= \int_1^9 f_0(y + 2n - t)\cos(\pi y)dy = g_1(t - 2n) \end{aligned}$$

한편, g_1 은 직접 계산하면, 우선

$$g_1 = \begin{cases} \frac{\cos(\pi t) - 1}{\pi^2} & 0 < t \le 1 \vee 9 \le t < 10 \\ \frac{4\cos(\pi t)}{\pi^2} & 2 < t < 8 \\ \frac{3\cos(\pi t) + 1}{\pi^2} & 1 < t \le 2 \vee 8 \le t < 9 \end{cases}$$

따라서 $g_1(x)$ 의 극소점들은 $x = \alpha$, $\alpha = 1 + 2n, 3 + 2n, 5 + 2n, 7 + 2n, 9 + 2n$ 이다. 따라서 $n = 2$. $k = 5$. 따라서 답은 $5 + (2 + 4 + 4 + 4 + 2) = 21$ 이다. □