뉴턴 가우스 직선

Donghui Kim

2018년 3월 19일

사각형 $ABCD$에 대하여 AC와 BD의 중점을 각각 Z, Y라 하자. $ABCD$가 평행사변형이 아닌 조건은 $Y \neq Z$와 동치다.

$Y \neq Z$인 경우 직선 YZ를 **뉴턴 직선**이라 한다.

이제 완전 사변형 $ABCDEF$를 생각하자. 사실 세 대각선 AC, BD, EF의 중점은 한 직선 위에 있다. 이 직선을 **뉴턴-가우스 직선**이라 한다.

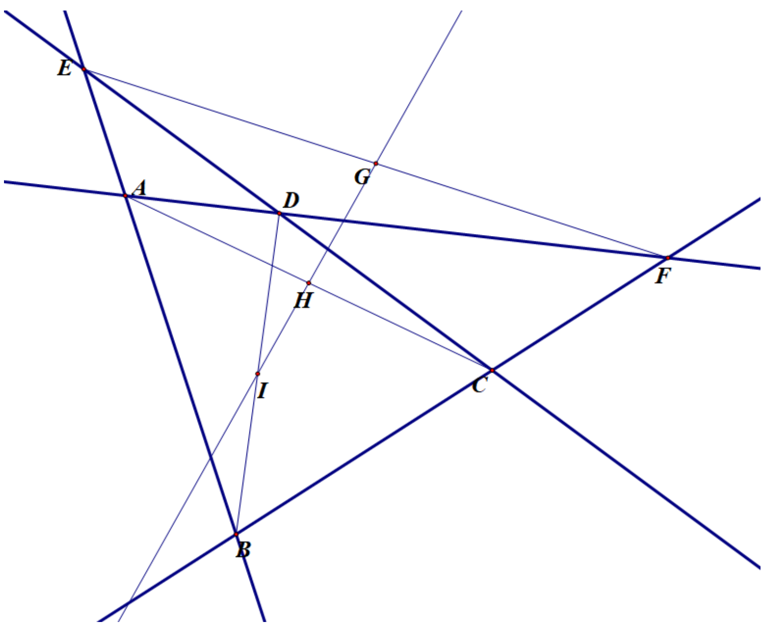


그림 1: 뉴턴-가우스 직선.

그림에서 EF, AC, BD의 중점이 각각 G, H, I이다. 이 성질은 교차 사각형의 경우에도 여전히 성립한다. 사실 이 경우 $BEDF$가 처음 그림에서 $ABCD$의 역할을

하고 있음을 볼 수 있다.

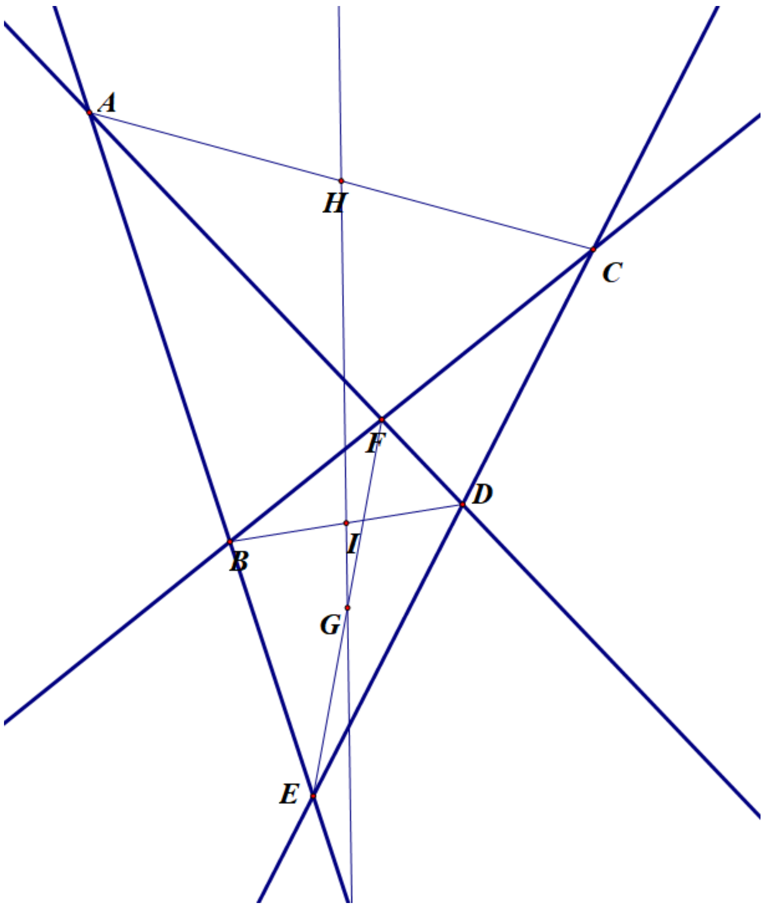
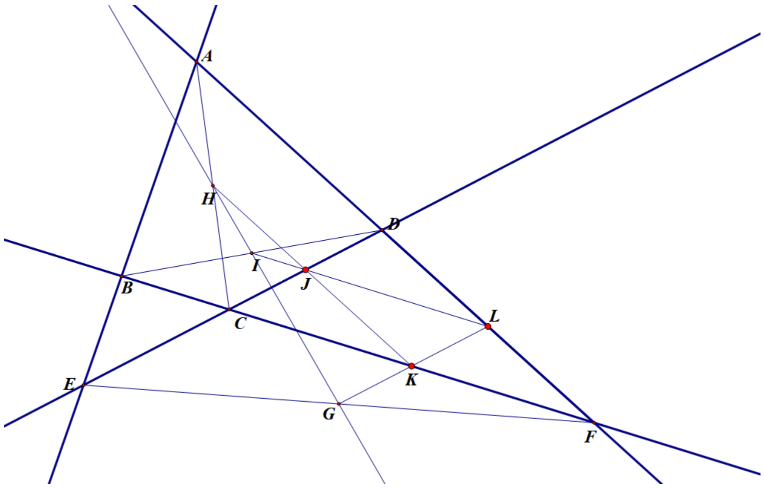


그림 2: 뉴턴-가우스 직선. $ABCD$가 교차 사각형일 때.

이 사실은 여러가지 방법으로 보일 수 있는데, 여기서는 메넬라우스 정리를 이용해 보았다.

정리 1. 완전 사변형 $ABCDEF$에서 대각선 AC, BD, EF의 중점은 한 직선위에 있다.

증명. 그림 에서 몇개의 점과 선을 추가하여 다음 그림을 그리자. 우선 EF, AC, BD의 중점이 각각 G, H, I이다. BC, CF, FB의 중점을 각각 J, K, L이라 하자. $LK \parallel BC$이므로 LKG는 공선점이다. 마찬가지로 KJH와 IJL도 공점선이다.



이제 LKG와 DCE, KHJ와 FAD, JIL과 CBF가 각각 닮음의 위치에 있으므로,

$$\frac{LG}{GK} \cdot \frac{KH}{HJ} \cdot \frac{JI}{IL} = \frac{DE}{EC} \cdot \frac{FA}{AD} \cdot \frac{CB}{BF} = 1$$

마지막 등호는 공선점 ABE와 $\triangle BCF$에 대한 메넬라우스 정리다.

이제 H, I, G와 $\triangle JKL$에 대한 메넬라우스 정리에 의하여 HIG는 공선점이 된다. $\square$