몇가지 무리수

Donghui Kim

2018년 3월 19일

요 약

몇가지 무리수에 대하여 알려진 증명들을 정리해 본다. 대부분의 내용은 [1]의 일부를 발췌 번역한 것이다.

명제 1. 자연로그의 밑 e는 무리수다.

증명. $e = \sum_{k=0}^{\infty} = \frac{a}{b}$를 만족하는 양의 정수 a, b가 존재한다고 가정하자.

$$n!be = b!a$$

$$n!be = b\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!} + b\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{n!}{k!}$$

여기서 $b\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!}$은 정수이며

$$b\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{n!}{k!} \leq b\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{n^{k-n}} = \frac{b}{n}$$

따라서 $b < n$일 때 이는 모순이다.

곧 e는 무리수다. $\square$

그러나 이 증명으로는 e^2가 무리수임을 보일 수는 없다.

명제 2. e^2는 무리수다.

증명. 자연수 a, b에 대하여 $e^2 = \frac{a}{b}$라고 하자. $be = ae^{-1}$이다. 양변에 충분히 큰 양의 정수 n에 대하여 $n!$을 곱하자.

좌변에서

$$n!b\left(1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n!}\right)$$

은 정수부분이고 나머지 부분에 대해서는

$$n!b\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k!}<\frac{b}{n}$$

이 성립한다. 마찬가지로 우변에서도 큰 정수부분을 얻고 남는 부분은

$$(-1)^{n+1}n!a\left(\frac{1}{(n+1)!}-\frac{1}{(n+2)!}+\frac{1}{(n+3)!}-\cdots\right)$$

이 되는데, n을 짝수로 선택하면 이것이 말이 안된다는 것을 알 수 있다. 왜냐하면, 이는 절댓값이 $\frac{a}{n+1}$ 보다 작은 음수이기 때문이다. 곧, $n!be = ae^{-1}n!$ 에서 좌변은 양의 장수에서 조금 양으로 벗어난 수이고, 우변은 양의 정수에서 작은 양수만큼 모자란 수이기 때문에 모순임을 알 수 있다. □

e^4 이 무리수임을 보일 때는 조금 더 복잡한 과정이 필요하다.

명제 3. $\nu_2(n!) \le n-1$ 이다. 등호는 어떤 영 이상의 정수 m에 대하여 $n=2^m$ 일 때 성립한다.

증명. $\nu_2(n!) = \sum_{k=1}^{N}\left\lfloor\frac{n}{2^k}\right\rfloor \le \sum_{k=1}^{N}\frac{n}{2^k} \le n$ □

명제 4. e^4 은 무리수다.

증명. e^4 이 유리수라고 가정하자. 어떤 양의 정수 a, b에 대하여 $e^4=\frac{a}{b}$ 가 성립한다고 가정하자.

이제 충분히 큰 양의 정수 m에 대하여 $n=2^m$ 이라 하고,

$$b\frac{n!}{2^{n-1}}e^2 = a\frac{n!}{2^{n-1}}e^{-2}$$

를 생각하자. 양 변에 $e^x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$, $x=\pm 2$를 대입했을 때 좌변과 우변에서 정수항들인

$$b\frac{n!}{2^{n-1}}\frac{2^r}{r!},\ (-1)^r a\frac{n!}{2^{n-1}}\frac{2^r}{r!}$$

을 얻을 수 있다.

나머지 부분은 좌변에서는

$$2b\left(\frac{2}{n+1}+\frac{4}{(n+1)(n+2)}+\frac{8}{(n+1)(n+2)(n+3)}+\cdots\right)$$

우변에서는

$$2a\left(-\frac{2}{n+1}+\frac{4}{(n+1)(n+2)}-\frac{8}{(n+1)(n+2)(n+3)}+\cdots\right)$$

이는 각각 $\frac{4b}{n}$ 그리고 $-\frac{4a}{n}$ 정도 되는 수들로 결국 좌련은 정수에서 약간 큰 수이고 우변은 정수에서 약간 작은 수이기 때문에 모순이다. □

보조정리 5. 양의 정수 n에 대하여 다항식

$$f(x) = \frac{x^n(1-x)^n}{n!}$$

에 대하여 다음이 성립한다.

i. $n!f(x) \in x^n\mathbb{Z}[x]$

ii. $0 < x < 1 \implies 0 < f(x) < \frac{1}{n!}$

iii. $f^{(k)}(0)$와 $f^{(k)}(1)$은 $k \geq 0$일 때 정수다.

증명. i과 ii은 자명하다.

이제 $f(x) = \frac{1}{n!}\sum_{k=n}^{2n} c_k x^k$이라 할 때 $c_k \in \mathbb{Z}$. $f^{(k)}(0)$ 는 $k < n$일 때는 0이고, $n \leq k$일 때는 그 값이 $\frac{k!}{n!}c_k$로 정수다. 대칭성에서 $f^{(k)}(1)$또한 정수다. □

정리 1. 0이 아닌 유리수 r에 대하여 e^r은 무리수다.

증명. s를 양의 정수라 하자. e^s가 유리수가 아님을 보이면 된다.

이제 어떤 양의 정수 a, b에 대하여 $e^s = \frac{a}{b}$ $n! > as^{2n+1}$을 만족하는 정수 n을 택하자. $f(n) = \frac{x^n(1-x)^n}{n!}$, $F(x) = s^{2n}f(x) - s^{2n-1}f'(x) + s^{2n-2}f''(x) - \cdots + f^{(2n)}(x)$ 라 하자. $F(x)$는 무한합으로 간주해도 관계 없다.

$$F(x) = s^{2n}f(x) - s^{2n-1}f'(x) + s^{2n-2}f''(x) - \cdots$$

그러면

$$F'(x) = -sF(x) + s^{2n+1}f(x)$$

따라서

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\left[e^{sx}F(x)\right] = se^{sx}F(x) + e^{sx}F'(x) = s^{2n+1}e^{sx}f(x)$$

이제 $N := b\int_0^1 s^{2n+1}e^{sx}f(x)\,\mathrm{d}\,x = b\left[e^{sx}F(x)\right]_0^1 = aF(1) - bF(0)$라 할때, 보조정리 5에 의해 이는 정수다. 그런데 마찬가지로 보조정리 5에서

$$0 < N = b\int_0^1 s^{2n+1}e^{sx}f(x)\,\mathrm{d}\,x < bs^{2n+1}e^s\frac{1}{n!} = \frac{as^{2n+1}}{n!} < 1$$

이므로 이는 모순이다. 따라서 e^s는 유리수가 아니다. □

정리 2. π^2는 무리수다.

증명. 양의 정수 a, b에 대해서 $\pi^2 = \frac{a}{b}$라 하자. 양의 정수 n에 대하여 $f(x) = \frac{x^n(1-x)^n}{n!}$에 대해서

$$F(x) = b^n \left(\pi^{2n} f(x) - \pi^{2n-2} f^{(2)}(x) + \pi^{2n-4} f^{(4)}(x) - \cdots\right)$$

라 하면 $F''(x) = -\pi^2 F(x) + b^n \pi^{2n+2} f(x)$. 보조정리 5에서 $F(0)$와 $F(1)$은 정수다.

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\left[F'(x)\sin\pi x - \pi F(x)\cos\pi x\right] \\
=&\left(F''(x) + \pi^2 F(x)\right)\sin\pi x \\
=&b^n \pi^{2n+2} f(x)\sin\pi x \\
=&\pi^2 a^n f(x)\sin\pi x
\end{aligned}$$

따라서

$$N := \pi \int_0^1 a^n f(x)\sin\pi x \,\mathrm{d}\,x$$

라 하면

$$N = \left[\frac{1}{\pi} F'(x)\sin\pi x - F(x)\cos\pi x\right]_0^1 = F(0) - F(1)$$

이므로 이는 정수다. 또한 $N > 0$.

그러나 $\frac{\pi a^n}{n!} < 1$이 되도록 n을 충분히 크게 선택하면 $0 < N < 1$이 되어 모순이다. 따라서 π^2는 무리수다. □

참고 문헌

[1] Martin Aigner and Günter M. Ziegler. *Proofs from the Book*. Springer, fifth edition, 2014.