국제수학올림피아드 2018 문제와 풀이

김동희

2018년 7월 19일

1. 예각삼각형 ABC의 외접원을 Γ라 하자. 점 D와 E는 각각 변 AB와 AC 위에 있고 $AD = AE$를 만족한다. 선분 BD와 CE의 수직이등분선이 Γ의 호 $\widehat{\mathrm{AB}}$중 작은 호, 호 $\widehat{\mathrm{AC}}$중 작은 호와 각각 점 F, G에서 만난다. 두 직선 DE와 FG가 평행함(또는 일치함)을 보여라.

2. 다음 조건을 만족하는 실수 $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$가 존재하는 정수 $n \geq 3$을 모두 구하여라.

(조건) $a_{n+1} = a_1$, $a_{n+2} = a_2$이고, $i = 1, 2, \ldots, n$에 대하여

$$a_i a_{i+1} + 1 = a_{i+2}$$

이다.

3. 정수들의 다음과 같은 정삼각형 모양의 나열을 **역파스칼삼각형**이라 하자 : 가장 밑줄에 있는 수들을 제외하고, 나머지 각 수들은 바로 밑에 있는 두 수의 차 (의 절댓값) 이다. 예를 들어, 다음 나열은 네 개의 가로줄로 이루어지고 1 부터 10 까지의 모든 수가 등장하는 역파스칼삼각형이다.

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & 4 & & & \\
 & & 2 & & 6 & & \\
 & 5 & & 7 & & 1 & \\
8 & & 3 & & 10 & & 9
\end{array}
$$

2018 개의 가로줄로 이루어지고 1 부터 $1 + 2 + \cdots + 2018$ 까지의 모든 수가 등장하는 역파스칼삼각형이 존재하겠는가?

4. 좌표평면 위의 점 (x, y) 에 대하여, x 와 y 가 모두 20 이하의 양의 정수일 때, 이 점을 **지점**이라 하자.

400 개의 지점이 처음엔 모두 비어있다. 수영과 상일이 번갈아 빈 지점에 돌을 놓고, 수영이 먼저 시작한다. 수영은 자기 차례에 빈 지점에 새로운 빨간 돌 하나를 놓되, 빨간 돌이 놓인 어떤 두 지점 사이의 거리도 $\sqrt{5}$ 가 되지 않도록 놓는다. 상일은 자기 차례에 빈 지점에 새로운 파란 돌 하나를 놓는다.(파란 돌은, 돌이 놓여 있는 지점과의 거리에 상관없이, 빈 지점 어디에나 놓을 수 있다.) 이 게임은 한 사람이 더 이상 돌을 놓을 수 없을 때까지 진행한다.

상일이 어떤 전략으로 파란 돌들을 놓든지 상관없이, 수영이 항상 최소한 K 개 빨간 놀을 놓을 수 있는 K 값 중 가장 큰 값을 구하여라.

5. 양의 정수들의 무한수열 $a_1, a_2, \ldots$ 에 대하여 다음 조건을 만족하는 정수 $N > 1$ 이 존재한다고 하자.

(조건) 모든 $n \geq N$ 에 대하여

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1}$$

이 정수이다.

다음을 만족하는 양의 정수 M 이 존재함을 보여라.

모든 $m \geq M$ 에 대하여, $a_m = a_{m+1}$ 이다.

6. 볼록사각형 $ABCD$ 가 $AB \cdot CD = BC \cdot DA$ 를 만족한다. 사각형 $ABCD$ 의 내부에 있는 점 X 가 두 등식

$$\angle XAB = \angle XCD, \ \angle XBC = \angle XDA$$

를 만족한다. 이때, $\angle BXA + \angle DXC = 180°$ 임을 보여라.

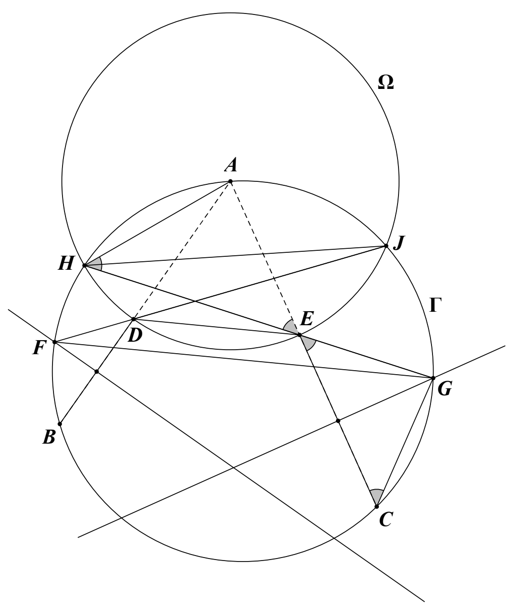
Notes

1(DiamondVillager, AOPS, Adapted). A를 중심으로 반지름이 AD인 원을 Ω라 하고 Ω와 Γ의 열호 AB와 만나는 점을 H, Ω와 Γ의 열호 AC와 만나는 점을 J라고 하자. 삼각형 AHE는 $AH = AE$인 이등변 삼각형이므로 $\angle AHE = \angle AEH$이다. 또 원주각으로 $\angle AHG = \angle ACG$. 삼각형 EGH 또한 $GE = GC$인 이등변 삼각형이므로 $\angle GEC = \angle GCE$. 따라서 $\angle GEC = \angle AEH$이므로 HEG는 공선점이다. 마찬가지로 HDF도 공선점이다.

이제 Ω와 Γ의 원주각을 이용하여

$$\angle JDE = \angle JHE = \angle JHG = \angle JFG$$

따라서 동위각이 같으므로 $DE \parallel FG$이다.



□

2(Morskow, AOPS). $a_{n+3} = a_3$라고 가정하자. $a_{n+3} = a_3 = a_1a_2 + 1 = a_{n+1}a_{n+2} + 1$. 따라서 $i = 1, 2, \ldots, n+1$에 대하여

$$a_i a_{i+1} + 1 = a_{i+2}$$

따라서

$$a_i a_{i+1} a_{i+2} + a_{i+2} = a_{i+2}^2$$

이 성립한다.

$$\sum_{i=1}^{n} a_i a_{i+3} = \sum_{i=1}^{n} a_i \left(a_{i+1}a_{i+2}+1\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2$$

다중집합으로 볼 때

$$\{a_1,\, a_2,\, \ldots,\, a_n\} = \{a_4,\, a_5,\, \ldots a_{n+3}\}$$

이므로 재배열 부등식에서 $a_i = a_{i+3}$ 이 모든 $i = 1, 2, \ldots, n$ 에 대하여 성립한다. □

3(Orestis_Lignos, AOPS). 존재하지 않는다.

우선 서로 다른 수들로 이루어진 역파스칼삼각형의 일반적인 특징을 살펴보자. n 행짜리 역파스칼 삼각형을 생각하고 다음과 같이 귀납적으로 수를 잡아나가자.

> $b_1 = s_1$ 은 가장 꼭대기의 수다. 이제 b_1 의 왼쪽 아래와 오른쪽 아래의 수 중에서 작은 수를 s_2, 큰 수를 b_2 라 하자. 또 제 3행에서 b_2 의 왼쪽 아래와 오른쪽 아래의 수 중에서 작은 수를 s_3, 큰 수를 b_3 라고 하자. 이런식으로 각각의 $k = 1, 2, \ldots, n-1$ 에 대하여 제 $k+1$ 행에서 b_k 의 왼쪽 아래와 오른쪽 아래의 수 중에서 작은 수를 s_{k+1}, 큰 수를 b_{k+1} 이라고 하자.

이때, 이 역파스칼 삼각형에 나타난 수 중에 가장 작은 n 개 수들을 순서대로

$$m_1 < m_2 < \ldots < m_n$$

이라 하면,

$$b_n = b_{n-1} + s_n = b_{n-2} + s_{n-1} + s_n = \cdots = s_1 + s_2 + \cdots + s_n \geq m_1 + m_2 + \cdots + m_n$$

이다. 이때 $b_1, b_2, \ldots, b_n$ 을 이 역파스칼삼각형의 b 수열이라 하고, $s_1,\, s_2,\, \ldots,\, s_n$ 을 이 역파스칼삼각형의 s 수열이라 하자. 또, b_n 을 이 역파스칼삼각형의 빅수라 하자.

이제 $n = 2018$ 이라 하고, 문제의 조건을 만족하는 그런 역파스칼삼각형 Δ 가 존재한다고 가정해 보자. Δ 의 b 수열을 $b_1,\, b_2,\, \ldots,\, b_n$ 이라 하고, s 수열을 $s_1,\, s_2,\, \ldots,\, s_n$ 이라 하자. 그러면

$$\frac{n(n+1)}{2} \geq b_n = s_1 + s_2 + \cdots + s_n \geq 1 + 2 + \cdots + n$$

이기 때문에 등호 성립조건에서

$$\{s_1, s_2, \ldots, s_n\} = \{1, 2, \ldots, n\}$$

를 얻는다. 또한 s 수열과 b 수열이 놓인 자리를 주도로라 하자.

이제 제 n 행에 있는 수 중에서 s_n, b_n 을 제외하면, 그 좌, 우에 모두 $n-2$ 개의 수가 있고, 이 수들로부터 차례로 차를 계산해서 위쪽으로 적어나간 (최대)두 개의 역파스칼 삼각형을 생각하자. 이 두 개의 역파스칼삼각형을 L, R 이라 하자. 이 역파스칼 삼각형에서도 나름대로 s, b 수열을 정의할 수 있다. L 의 빅수를 b^L 이라 하고, R 의 빅수를 b^R 이라 하자. 이때 $M = b^L + b^R$ 이라 하면, L 과 R 의 행의 합이 $n-2$ 개이고, Δ 의 주도로와는 만나지 않기 때문에

$$M \geq (n+1) + (n+2) + \cdots + (2n-2) = \frac{1}{2}(n-2)(3n-1)$$

그런데, 존재하는 수 자체가 $\frac{n(n+1)}{2}$ 가 가장 큰 수이고 따라서

$$M \leq \frac{n(n+1)}{2} - 1 + \frac{n(n+1)}{2} - 2$$

곧,

$$\frac{n(n+1)}{2}-1+\frac{n(n+1)}{2}-2\le\frac{1}{2}(n-2)(3n-1)$$

따라서 $n\le 8$ 이라서 모순이다. $\square$

4. K 의 최댓값은 100 이다.

우선 $K\ge 100$ 임을 보이자. 400 개 각 지점을 $(x+y)$ 라고 할 때, $x+y$ 를 2 로 나눈 나머지로 채색하자. 0 으로 채색된 200 개 지점에 수영이 계속해서 돌을 놓는 전략에서 $K\ge 100$ 임을 알 수 있다.

이제 $K\le 100$ 임을 보이자. 20×20 모양의 지점의 집합을 4×4 모양의 지점의 집합 25 개로 분할한다. 각각의 4×4 모양의 지점의 집합을 지역이라 하고, 각각의 지역을 다음과 같이 채색하자.

1	2	3	4
3	4	1	2
2	1	4	3
4	3	2	1

상일은 매번 수영이 직전에 돌을 놓았던 지역에 돌을 놓되 수영이 돌을 놓은 곳의 지역의 중심에 대한 점대칭 지역에 돌을 놓는다. 상일은 처음부터 이렇게 진행하기 때문에 매번 돌을 놓을 수 있다. 또한, 수영은 각 지역에서 한가지 숫자에 대하여 최대 1 개이 돌만을 놓을 수 있다 따라서 수영은 100 개 초과하는 돌을 놓을 수 없다. $\square$

5(v_Enhance(Evan Chen), AOPS). 주어진 성질을 만족하는 수열 a_n 과 N 을 생각하자. 임의의 정수 $n>N$ 에 대하여

$$t_n=\frac{a_{n+1}}{a_1}-\frac{a_n}{a_1}+\frac{a_n}{a_{n+1}} \tag{1}$$

은 정수다. 곧, 정수 t_n 에 대하여

$$a_1a_{n+1}t_n=a_{n+1}\left(a_{n+1}-a_n\right)+a_na_1 \tag{2}$$

유리수 $\frac{n}{m}$ 에 대하여 valuation ν_p 를 $\nu_p\left(\frac{n}{m}\right)=\nu_p(n)-\nu_p(m)$ 으로 정의한다. 이것을 p-adic valuation 이라 한다.

주장 0.1. 소수 p 에 대하여 $p\nmid a_1$ 이면 모든 정수 $n>N$ 에 대하여 $\nu_p(a_{n+1})\le\nu_p(a_n)$.

증명. (1) 에서 마지막 항의 p-adic valuation 은 0 이상이다. $\square$

어떤 수열 α_n 이 결국 상수라 함은 어떤 T 가 존재하여 $T<n$ 이면 $\alpha_{n+1}=\alpha_n$ 임을 말한다.

주장 0.2. 소수 p 에 대하여 $p\mid a_1$ 이면 수열 $\nu_p(a_n)$ 은 결국 상수다.

증명. 가정에 의하여 $\nu_p(a_1)>0$. 두 가지 경우로 나누어 생각하자.

i. 어떤 $k > N$ 에 대하여 $\nu_p(a_k) \geq \nu_p(a_1)$ 인 경우.

일반적으로 어떤 n 에 대하여 $\nu_p(a_n) \geq \nu_p(a_1)$ 이 성립한다고 가정해 보자. (1) 에 의하여

$$\nu_p\left(\frac{a_{n+1}}{a_1} + \frac{a_n}{a_{n+1}}\right) \geq 0$$

따라서

$$\nu_p(a_1) \leq \nu_p(a_{n+1}) \leq \nu_p(a_n)$$

곧, 수학적 귀납법으로, $n \geq k$ 이면

$$\nu_p(a_1) \leq \nu_p(a_{n+1}) \leq \nu_p(a_n)$$

임을 알 수 있다.

따라서 $\nu_p\left(a_n\right)$ 은 단조 감소하는 아래로 유계인 정수수열로 결국 상수다.

ii. 모든 $k > N$ 에 대하여 $\nu_p(a_k) < \nu_p(a_1)$ 인 경우. 임의의 $n > N$ 에 대하여 $\nu_p\left(\frac{a_{n+1}}{a_1}\right) < 0$, 그리고 $\nu_p\left(\frac{a_n}{a_1}\right) < 0$, 따라서 (1) 에서 적어도 두 항은 p-adic valuation이 같아야 한다. 세 경우를 모두 고려하면,

$$\nu_p\left(\frac{a_{n+1}}{a_1}\right) = \nu_p\left(\frac{a_n}{a_1}\right) \implies \boxed{\nu_p(a_{n+1}) = \nu_p(a_n)}$$

$$\nu_p\left(\frac{a_{n+1}}{a_1}\right) = \nu_p\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right) \implies \boxed{\nu_p(a_{n+1}) = \frac{\nu_p(a_n) + \nu_p(a_1)}{2}}$$

$$\nu_p\left(\frac{a_n}{a_1}\right) = \nu_p\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right) \implies \nu_p(a_{n+1}) = \nu_p(a_1), \text{ but this is impossible.}$$

따라서 결국 $\nu_p(a_{n+1}) \geq \nu_p(a_n)$ 이 성립하는데, $\nu_p(a_n)$ 에 대하여 $\nu_p(a_1) - 1$ 이 상계이므로 결국 안정 (상수가 됨) 된다. □

두 번째 주장이 적용되는 소수는 유한개이기 때문에 결국 어떤 K 가 존재해서 $n > K$ 인 n 에 대하여 임의의 소수 $p | a_1$ 에 대하여 $\nu_p\left(a_n\right)$ 이 안정된다. 곧, $a_{n+1} | a_n$ 이 $n > N$ 이면 성립하기 때문에 결국 a_n 자체가 안정된다. □

노트 0.1. 이 풀이는 거의 p-adic하다. 왜냐하면 임의의 소수 p 에 대하여 $a_n \in \mathbb{Z}$ 을 $a_n \in \mathbb{Z}_p$ 로 바꾸어도 성립하기 때문이다. 곧, 각각의 소수는 서로간의 별 연관성 없이 증명에서 작용한다.

주의 0.1. 양의 정수 수열 x_n 이 모든 p 에 대해서 $\nu_p(x_n)$ 가 결국 안정되는 수열이라고 할 때도 x_n 이 결국 안정된다고 볼 수는 없다. 예를 들어 n_n 을 n 번째 소수라고 해 보라! 이것이 첫번째 주장에서 ν_p 가 결국 안정된다는 것을 보이는 것으로는 불충분하고, 전체적으로 단조감소함을 보여야 했던 이유가 된다.

6(tastymath75025, AOPS). 직선 AB 와 DC 의 교점을 E 라 하고, AD 와 BC 의 교점을 F 라 하자.

사각형 $AXCE$ 에 주목해 보자. $\angle XAE + \angle XCE = \pi$ 이므로 $AXCE$ 는 원에 내접한다. 마찬가지로 $DXBE$ 또한 원에 내접한다.

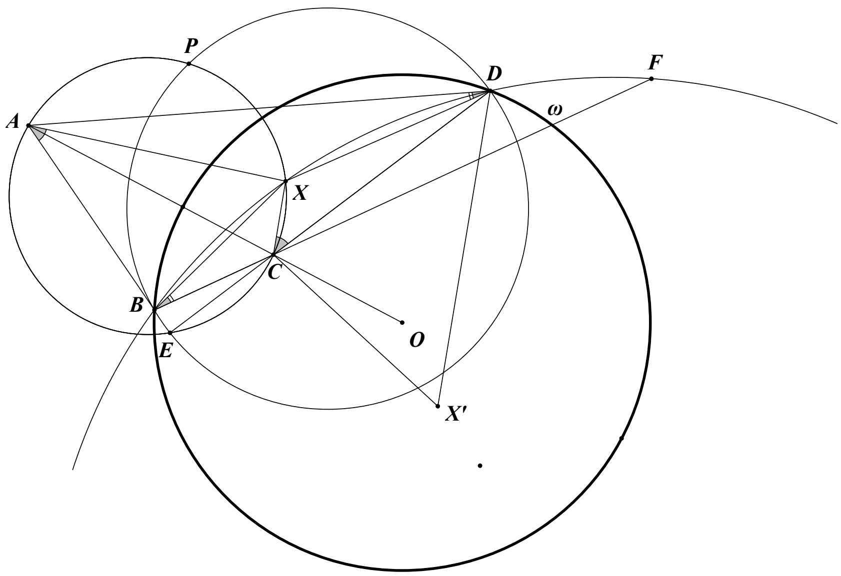
$X'CD \sim XBA$ 가 되도록 X' 을 잡자. $\angle X'DC = \angle XAB = \angle XCD$ 이므로 $XC || X'D$. $\angle AXB + \angle CXD = \angle DXC + \angle DX'C$ 이므로 $\angle DXC + \angle DX'C = 180°$ 임을 보이면 되고 이는 $XCX'D$ 이 등변사다리꼴임을 보이면 된다.

만일 $XCX'D$ 이 평행사변형이라면 $ABCD$ 는 AC 에 대칭인 연모양이 되고 따라서 $\angle AXB = \angle CXD = 90°$.

이제 $XCX'D$ 이 사다리꼴이 아니면 $X'C = XD$ 만 보이면 되는데 닮음에서 $X'C = BX\frac{CD}{AB}$ 이므로 결국 $\dfrac{BX}{DX} = \dfrac{AB}{CD}$ 을 보이고자 한다.

$P = (ACE) \cap (BDE)$ 라 하자. 나선 닮음에 의하여 $PAB \sim PCD$. 따라서 $\dfrac{AB}{CD} = \dfrac{PB}{PD}$. 원 ω 를 중심이 AC 상의 O 에 있고 B, D 를 지나게 하자. $AB \cdot CD = AD \cdot BC$ 이므로 이는 삼각형 ABC 에 대한 B-아폴로니우스 원이자 곧 삼각형 ACD 에 대한 D-아폴로니우스 원이다.

이제 우리는 P, X 가 서로 ω 에 대한 반전점임을 증명하고자 한다. 만일 그렇다고 한다면, $\dfrac{PB}{PD} = \dfrac{XB}{XD}$ 이므로 증명이 끝이 날 것이다.



원 (ACE) 를 보면, A, C 는 ω 에 대해 서로 반전이므로 (ACE) 는 ω 에 대한 반전에 대하여 고정된다. 또한, P 와 X 는 각각 $(BDE), (BDF)$ 위의 점이므로 이제 이 두 원이 ω 에 대해서 반전임을 보이면 된다. 그런데 이는 $\angle BED + \angle BFD = \angle BOD$ 와 같은 조건이다.

$$\begin{aligned}
&\angle BED + \angle BFD \\
=&(180^\circ - \angle A - \angle D) + (180^\circ - \angle A - \angle B) \\
=&\angle C - \angle A
\end{aligned}$$

그리고

$$\begin{aligned}
&\angle BOD \\
=&\angle BOC + \angle DOC \\
=&(\angle BCA - \angle CBO) + (\angle DCA - \angle CDO) \\
=&\angle BCA + -\angle CAB + \angle DCA - \angle CAD = \angle C - \angle A
\end{aligned}$$

따라서 증명이 완료된다. □