IMO Short List 문제와 풀이

김동희

2018년 7월 19일

1 2017년 IMO Problem Algebra

1. $\mathbb{R}$은 실수 전체의 집합이다. 다음 조건을 만족하는 함수 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$을 모두 구하여라.

임의의 실수 x, y에 대하여,

$$f(f(x)f(y)) + f(x+y) = f(xy)$$

2 2016년 IMO shortlisted problems Algebra

2. 양수 a, b, c가 $\min(ab, bc, ca) \geq 1$를 만족할 때

$$\sqrt[3]{(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)} \leq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2 + 1$$

가 성립함을 보여라.

3. 다음이 성립하는 양수 C의 최솟값을 구하여라.

임의의 다섯개 양의 실수 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 중에서 항상 서로 다른 i, j, k, l이 존재하여

$$\left|\frac{a_i}{a_j} - \frac{a_k}{a_l}\right| \leq C.$$

가 성립한다.

4. 다음을 만족하는 3이상의 정수 n을 모두 구하여라.

임의의 실수 $a_1, a_2, \ldots, a_n$과 $b_1, b_2, \ldots, b_n$에 대하여, $|a_k|+|b_k| = 1$ $(1 \leq k \leq n)$이 성립할 때, x_1, x_2, $\ldots$, $x_n \in \{1, -1\}$이 존재하여

$$\left|\sum_{k=1}^{n} x_k a_k\right| + \left|\sum_{k=1}^{n} x_k b_k\right| \leq 1$$

을 만족한다.

5. 양의 실수 전체의 집합을 $\mathbb{R}^+$로 나타내자. 다음을 만족하는 함수 $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$를 모두 구하여라.

모든 실수 x, y에 대하여

$$xf\left(x^2\right)f(f(y)) + f(yf(x)) = f(xy)\left(f\left(f\left(x^2\right)\right) + f\left(f\left(y^2\right)\right)\right)$$

이 성립한다.

6.

(a) 모든 양의 정수 n이 다음을 만족함을 보여라.

어떤 정수 a, b가 존재하여, $0 < b \leq \sqrt{n}+1$, $\sqrt{n} \leq \frac{a}{b} \leq \sqrt{n+1}$을 만족한다.

(b) 다음을 만족하는 양의 정수 n이 무수히 많음을 보여라.

$0 < b \leq \sqrt{n}$과 $\sqrt{n} \leq \frac{a}{b} \leq \sqrt{n+1}$을 만족하는 정수 a, b가 존재하지 않는다.

7. 양변이 각각 2016개의 일차식으로 이루어진 다음 방정식이 칠판에 쓰여 있다.

$$(x-1)(x-2)\cdots(x-2016) = (x-1)(x-2)\cdots(x-2016)$$

이 방정식의 4032개의 일차식 중에서 정확하게 k개의 식을 잘 지워서, 양변에 각각 적어도 하나의 일차식은 남아있고, 지우고 남은 방정식이 실근을 갖지 않게 하려고 한다. 이것이 가능하게 되는 가장 작은 양의 정수 k의 값은 무엇인가?

8. 실수 전체의 집합을 $\mathbb{R}$로 나타내자. 다음을 만족하는 함수 $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$을 모두 구하여라.

i. $f(0) \neq 0$

ii. 모든 실수 x, y에 대하여

$$f(x+y)^2 = 2f(x)f(y) + \max\left\{f\left(x^2\right) + f\left(y^2\right), f\left(x^2+y^2\right)\right\}$$

가 성립한다.

9. 다음을 만족하는 실수 a의 최댓값을 구하여라.

임의의 양의 정수 n에 대하여 $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ 일 때

$$\frac{1}{x_1 - x_0} + \frac{1}{x_2 - x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n - x_{n-1}} \geq a\left(\frac{2}{x_1} + \frac{3}{x_2} + \cdots + \frac{n+1}{x_n}\right)$$

이 성립한다.

3 2015년 IMO shortlisted problems Algebra

10. 양의 실수의 수열 $a_1, a_2, a_3, \ldots$ 가 모든 자연수 k에 대하여

$$a_{k+1} \geq \frac{ka_k}{{a_k}^2 + (k-1)}$$

을 만족한다. 이때, 모든 2 이상의 자연수 n에 대하여 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geq n$ 이 성립함을 보여라.

11. 모든 정수 x, y에 대하여,

$$f(x - f(y)) = f(f(x)) - f(y) - 1$$

를 만족하는 함수 $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$를 모두 구하여라.

12. 양의 정수 n을 하나 고정하자. 다음 식의 최댓값을 구하여라.

$$\sum_{1 \leq r < s \leq 2n} (s - r - n)x_r x_s$$

여기서 모든 $i = 1, 2, \ldots, 2n$에 대하여 $-1 \leq x_i \leq 1$이다.

13. 다음을 만족하는 함수 $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$을 모두 구하여라.

모든 실수 x, y에 대하여

$$f(x + f(x + y)) + f(xy) = x + f(x + y) + yf(x)$$

가 성립한다.

14. 다음을 만족하는 함수 $f : \mathbb{Z} \longrightarrow 2\mathbb{Z} + 1$을 모두 구하여라.

모든 정수 x, y에 대하여

$$f(x + f(x) + y) + f(x - f(x) - y) = f(x + y) + f(x - y)$$

(단, $\mathbb{Z}$는 정수 전체이 집합이고 $2\mathbb{Z} + 1$은 모든 홀수의 집합이다.)

15. n을 2 이상의 고정된 자연수라 하자. 실수 계수 다항식 P와 Q에 대하여 다음이 성립하면 두 다항식이 블록-닮음이라고 한다.

모든 $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$에 대하여 수열

$$P(2015i), P(2015i-1), \ldots, P(2015i-2014) \text{ 과}$$
$$Q(2015i), Q(2015i-1), \ldots, Q(2015i-2014)$$

은 서로가 서로의 순열이다.

(a) $n+1$차의 서로 다른 블록-닮음 다항식 쌍이 존재함을 보여라.

(b) n차의 서로 다른 블록-닮음 다항식 쌍은 존재하지 않음을 보여라.

(단, 수열 $a_1, a_2, \ldots, a_k$가 $b_1, b_2, \ldots, b_k$의 순열이라 함은 어떤 k 순열 σ가 존재하여 각각의 $i = 1, 2, \ldots, k$에 대하여 $a_i = b_{\sigma(i)}$가 성립함을 말한다.)

4 2014년 IMO Shortlisted problems

16. 양의 정수 수열 $z_0 < z_1 < z_2 < \cdots$ 에 대하여 다음을 만족하는 정수 $n \geq 1$ 이 유일하게 존재함을 보여라

$$z_n < \frac{z_0 + z_1 + \cdots + z_n}{n} \leq z_{n+1}$$

17. 함수 $f : (0,1) \longrightarrow (0,1)$을

$$f(x) = \begin{cases} x + \dfrac{1}{2}, & x < \dfrac{1}{2} \text{ 일 때} \\ x^2, & x \geq \dfrac{1}{2} \text{ 일 때} \end{cases}$$

로 정의하자. 실수 a, b가 $0 < a < b < 1$을 만족한다. 수열 a_n과 b_n은 $a_0 = a$, $b_0 = b$, $a_n = f(a_{n-1})$, $b_n = f(b_{n-1})$ $(n > 0)$을 만족한다. 이때 어떤 양의 정수 n이

$$(a_n - a_{n-1})(b_n - b_{n-1}) < 0$$

을 만족함을 보여라.

18. 수열 $x_1, x_2, \cdots, x_n$에 대하여, 그 가격을

$$\max_{1 \le i \le n} |x_1 + x_2 + \cdots + x_i|$$

으로 정의하자.

주어진 n개 실수에 대하여, 서연이와 민준이가 낮은 가격으로 정렬하려고 한다. 별명이 Diligent인 서연이는 가능한 모든 배열을 확인하여 가장 낮은 가격인 D를 찾는다. 별명이 Greedy인 민준이는 먼저 $|x_1|$이 가장 작은 값이 되도록 x_1을 선택하고, 남은 수 중에서 x_2를 $|x_1 + x_2|$가 가장 작은 값이 되도록 선택한다. i번째 단계에서 민준이는 남은 수 중에서 x_i를 $|x_1 + x_2 + \cdots + x_i|$가 가장 작은 값이 되도록 선택한다. 각 단계에서 여러 수가 같은 값을 준다면 민준이는 임의로 아무거나 고른다. 끝으로 민준이는 가격이 G인 수열을 얻는다.

다음을 만족하는 상수 c의 최솟값을 구하여라.

> 모든 양의 정수 n에 대하여, 모든 n개 주어진 실수에 대하여, 민준이가 얻을 수 있는 모든 수열에 대하여 $G \le cD$가 성립한다.

19. 다음을 만족하는 함수 $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$를 모두 구하여라.

> 모든 정수 m, n에 대하여
>
> $$f(f(m) + n) + f(m) = f(n) + f(3m) + 2014$$

20. 다음 조건을 만족하는 모든 실수 계수 다항식 $P(x)$에 대하여, $P(0)$로 가능한 값을 모두 구하여라.

임의의 두 실수 x, y에 대하여

$$\left|y^2 - P(x)\right| \le 2\,|x| \iff \left|x^2 - P(y)\right| \le 2\,|y|$$

21. 다음을 만족하는 함수 $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$를 모두 구하여라.

임의의 $n \in \mathbb{Z}$에 대하여

$$n^2 + 4f(n) = f(f(n))^2$$

5 2013년 IMO Shortlisted Problems algebra

22. 양의 정수 n에 대하여 실수 a_1, a_2, …, a_{n-1}을 생각하자. 수열 u_0, u_1, u_2, …, u_n과 v_0, v_1, v_2, …, v_n이 $u_0 = u_1 = v_0 = v_1 = 1$을 만족하고, 각각의 $k = 1, 2, \ldots, n-1$에 대하여

$$u_{k+1} = u_k + a_k u_{k-1},\ v_{k+1} = v_k + a_{n-k} v_{k-1}$$

을 만족한다고 하자. $u_n = v_n$ 임을 보여라.

23. 2000개의 서로다른 실수의 집합에는

$$\left|\frac{a-b}{c-d} - 1\right| < \frac{1}{100000}.$$

와 $a > b$, $c > d$그리고 $(a, b) \neq (c, d)$를 만족하는 네 원소 a, b, c, d가 존재함을 보여라.

24. 양의 유리수 전체의 집합을 $\mathbb{Q}_{>0}$ 로 나타내자. 함수 $f : \mathbb{Q}_{>0} \longrightarrow \mathbb{R}$ 이 다음 조건을 만족한다고 하자.

임의의 $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$ 에 대하여

$$f(x)f(y) \geq f(xy) \text{그리고} f(x+y) \geq f(x) + f(y)$$

어떤 유리수 $a > 1$ 에 대하여 $f(a) = a$ 일 때, 임의의 $x \in \mathbb{Q}_{>0}$ 에 대하여 $f(x) = x$ 가 성립함을 증명하여라.

25. n 을 양의 정수라 하고, 양의 정수 수열 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 을 생각하자. 이 수열을 모든 $i \geq 1$ 에 대하여 $a_{n+i} = a_i$ 로 정의하여 무한 수열 $a_1, a_2, \ldots$ 로 확장하자. 이때,

$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq a_1 + n$$

과

$$a_{a_i} \leq n + i - 1 \ (i = 1, 2, \ldots, n)$$

이 성립한다면

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \leq n^2$$

이 성립함을 증명하여라.

26. 영 이상의 정수 전체의 집합을 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ 으로 나타내자. 다음을 만족하는 함수 $f : \mathbb{Z}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 를 모두 구하여라.

임의의 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 에 대하여

$$f(f(f(n))) = f(n+1) + 1$$

27. 정수 $m \neq 0$ 을 생각하자. 다음을 만족하는 실수 계수 다항식 $P(x)$ 를 모두 구하여라.

모든 실수 x에 대하여

$$\left(x^3 - mx^2 + 1\right) P(x+1) + \left(x^3 + mx^2 + 1\right) P(x-1) = 2\left(x^3 - mx + 1\right) P(x)$$

Notes

1. 함수 $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$이 임의의 실수 x, y에 대하여 조건 $P(x, y) : f(f(x)f(y)) + f(x + y) = f(xy)$를 만족한다고 가정하자. 만일 f가 상수함수, $f : x \mapsto k$라면, 조건에 대입하여 $k = 0$을 얻을 수 있다. 이제 상수함수가 아닌 경우를 고려하자.

$P(0, 0)$에서 $f\left(f(0)^2\right) = 0$이다. 곧, $f(c) = 0$인 c가 존재한다.

어떤 실수 c가 $f(c) = 0$을 만족한다고 하자. $P(x, c)$에서 $f(0)+f(x+c) = f(cx)$이다. 만일 $c \neq 1$이라면 x의 방정식 $x + c = cx$의 해가 존재하고, 그 해를 $x = b$라고 할 때, $P(b, c)$에서 $f(0) = 0$을 얻는다. 다시 $P(x, 0)$에서 $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$를 얻는다. 이는 f가 상수함수가 아니라는 데 모순이므로, 우리는 다음 사실을 알 수 있다.

$$f(c) = 0 \iff c = 1$$

곧, $f(0)^2 = 1$이라서 $f(0) = \pm 1$, $f(1) = 0$이다.

잠시 이 함수 방정식의 구조를 살펴보자. 더 구체적으로 함수 $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$과 실수 x, y에 대하여 조건 $P_h(x, y) : h(h(x)h(y)) + h(x + y) = h(xy)$를 생각하면,

$$(\forall x, y \in \mathbb{R} P_h(x, y)) \iff (\forall x, y \in \mathbb{R} P_{-h}(x, y))$$

이므로 $f(0) = -1$인 경우를 정확히 풀면 $f(0) = 1$인 경우는 부호만 바꾸어 얻을 수 있다.

이제 $f(0) = -1$인 경우를 고려하다. $P(x, 1)$에서 $f(x + 1) = f(x) + 1$을 얻는다. 따라서 수학적 귀납법에 의하여 다음을 얻는다.

$$\forall x \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{Z}, f(x + n) = f(x) + n$$

$P(x, 0)$에서 $f(-f(x)) = -f(x) - 1$. 이 조건을 $K(x)$라고 할 때, $K(-f(x))$에서 $f(-f(-f(x))) = -f(-f(x)) - 1$. 따라서

$$\forall x, f(f(x) + 1) = f(x)$$

를 얻는다. 이제 f가 injective함을 보이면 $f(x) = x - 1$을 얻을 수 있을 것이다.

어떤 실수 a, b에 대하여 $f(a) = f(b)$라고 가정하자. 어떤 정수 n에 대하여 x, y에 관한 방정식

$$\begin{cases} xy = a + n \\ x + y = b + n + 1 \end{cases}$$

의 해가 존재하며 이 해를 $x = p$, $y = q$라 할 때, $P(p, q)$에서 $f(f(p)f(q)) = -1$을 얻는다. 이는 $f(p)f(q) + 1 = 1$을 뜻하며, 따라서 일반성을 잃지 않고 $f(p) = 0$이라 할 수 있다. 그렇다면 $p = 1$이고, $q = a + n = b + n$이 되어 결국 $a = b$라서 f가 injection임을 알 수 있다.

우리는 다음 세 가지의 가능한 해를 얻었다.

$$f : x \mapsto 0,\ f : x \mapsto x - 1,\ f : x \mapsto -x + 1$$

첫 번째 경우는 풀이 과정에서 대입하여 얻은 것이고, 두 번째는 조건에 대입해 보면 확인 되며, 따라서 세 번째 또한 해가 된다는 것을 알 수 있다. □

2. 보조 정리를 먼저 하나 증명하자.

보조정리 1. 양수 x, y가 $xy \geq 1$을 만족할 때

$$\sqrt{(x^2+1)(y^2+1)} \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 + 1$$

가 성립한다. 등호는 $x = y$일 때 성립한다.

증명.

$$\left(x^2+1\right)\left(y^2+1\right) = |x+i|^2\,|y+i|^2 = |xy-1+i(x+y)|^2 = (xy-1)^2 + (x+y)^2$$

이 성립한다. 또한, $xy \geq 1$이기 때문에

$$(xy-1)^2 \leq \left(\frac{(x+y)^2}{4} - 1\right)^2$$

이 성립한다. 따라서,

$$\left(x^2+1\right)\left(y^2+1\right) \leq \left(\frac{(x+y)^2}{4} - 1\right)^2 + (x+y)^2 = \left(\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 + 1\right)^2$$

이 성립한다. □

일반성을 잃지 않고 $a \leq b \leq c$라 가정하면, $k = \dfrac{a+b+c}{3}$이라 할 때 $k \geq \sqrt[3]{abc} \geq 1$, $c \geq 1$이고 $ab \geq 1$이므로,

$$\sqrt[4]{(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)(k^2+1)} \leq \left(\frac{a+b+c+k}{4}\right)^2 + 1 = k^2 + 1$$

따라서

$$\sqrt[4]{(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)} \leq \left(k^2+1\right)^{\frac{3}{4}}$$

곧

$$\sqrt[3]{(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)} \leq k^2 + 1$$

으로 주어진 부등식이 증명되었다. □

별해. $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$를 $(a_1, a_2, a_3) \mapsto (b_1, b_2, b_3)$를, $a_i = \min(a_1, a_2, a_3)$, $a_j = \max(a_1, a_2, a_3)$를 만족하는 최소의 첨수 i와 i를 제외하고 만족하는 최소의 첨수 j에 대하여 $b_i = b_j = \dfrac{a_i + a_j}{2}$, 나머지 첨수 k에 대하여 $b_k = a_k$라고 하자.

이때, $a_i a_j \geq 1$이 모든 첨수 i, j에 대하여 성립하면 $b_i b_j \geq 1$ 또한 성립한다. T를 mixing variable 변환으로 하여 mixing variable 정리를 적용하면, 된다. □

별해 *2.* $f(x) = \ln\left(x^2+1\right)$이라 하자. 문제는

$$\frac{1}{3}\left(f(a) + f(b) + f(c)\right) \leq f\left(\frac{a+b+c}{3}\right)$$

을 보이는 것이다.

$a \leq b \leq c$라 가정하여도 일반성을 잃지 않는다. 먼저 보조정리에서

$$\frac{1}{3}\left(f(a) + f(b) + f(c)\right) \leq \frac{1}{3}\left(2f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(c)\right)$$

$$f''(x) = -\frac{2\left(x^2-1\right)}{\left(x^2+1\right)^2}$$

이므로 $x \geq 1$에서 $y = f(x)$의 그래프는 위로 볼록이다. 따라서 젠센 부등식에 의하여

$$\frac{1}{3}\left(2f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(c)\right) \leq f\left(\frac{a+b+c}{3}\right)$$

□

3. 일반성을 잃지 않고 $a_1 \le a_2 \le a_3 \le a_4 \le a_5$ 라고 가정하자. 다섯개의 수

$$\frac{a_1}{a_2},\ \frac{a_3}{a_4},\ \frac{a_1}{a_5},\ \frac{a_2}{a_3},\ \frac{a_4}{a_5}$$

를 생각해 보자. 이 수열의 특징은 인접한 두 항의 분자와 분모 중에 같은 첨수를 가진 것이 없다는 것이다. 또한, 첫번째와 다섯번째 항은 같은 첨수가 없다. 또한 그 값은 0보다 크고 1이하이다. 따라서 어떤 세 항은 동시에 $\left(0,\ \dfrac{1}{2}\right]$ 에 있거나 아니면 $\left(\dfrac{1}{2},\ 1\right]$ 에 있다. 만일 한 쌍의 이웃한 항이 같은 곳에 들어간다면, 값의 차는 $\dfrac{1}{2}$ 미만이 된다. 만일 이웃한 항이 같은 곳에 들어가지 않는다면 첫 번째와 마지막 항은 반드시 같은 곳에 들어가야 하므로, 값의 차가 $\frac{1}{2}$ 미만인 첨수가 중복되지 않은 조합이 가능하다. 따라서 $C \ge \frac{1}{2}$ 는 언제나 가능하다는 것을 알 수 있다.

한편, $a_1 = 1$, $a_2 = a_3 = a_4 = 2$, $a_5 = t$ 라 하면 $\dfrac{a_i}{a_j}$ 로 나올 수 있는 값은 충분히 큰 t 에 대하여 순서대로

$$\frac{1}{t},\ \frac{2}{t},\ \frac{1}{2},\ 1,\ 2,\ \frac{t}{2},\ t$$

이다. 이때, $\left|\dfrac{a_i}{a_j} - \dfrac{a_k}{a_l}\right|$ 로 선택될 수 있는 값 중에 가장 작은 값은 $\left|\dfrac{1}{2} - \dfrac{2}{t}\right|$ 인데, t 값이 한없이 커질 때 이 값은 한없이 $\dfrac{1}{2}$ 에 가까이 가므로, $C < 2$ 는 불가능하다. 따라서 $C = 2$ 임을 알 수 있다. □

해설.

$$\frac{a_1}{a_2},\ \frac{a_3}{a_4},\ \frac{a_1}{a_5},\ \frac{a_2}{a_3},\ \frac{a_4}{a_5}$$

를 잡아내는데는 특별한 주의가 필요하지 않다. 그저, 앞서서 나왔던 인덱스와 바로 직전 인덱스 순열만 피해서 나열하다보면, 건너뛴 항들 중 조건을 만족하는 것이 나오기 마련이다. 예를들어, 이런 조건으로 가장 작은 인덱스로만 나열한다면,

$$\frac{a_1}{a_2},\ \boxed{\frac{a_3}{a_4}},\ \frac{a_1}{a_5},\ \frac{a_2}{a_3},\ \frac{a_1}{a_4},\ \boxed{\frac{a_2}{a_5}}$$

까지 나열해 보면 네모친 항들로 인해서 같은 인덱스 없는 해당 표현의 차가 1/2보다 작아진 것을 볼 수 있다. □

4. n 이 짝수인 경우 $a_1 = a_2 = \cdots = a_{n-1} = b_n = 0$, $b_1 = b_2 = \cdots = b_{n-1} = a_n = 1$ 을 고려하면 두 상이 모두 홀수라서 불가능하다.

이제 n 이 홀수인 경우는 모두 가능하다는 것을 보이자. 일반성을 잃지 않고 $b_k \ge 0$ 이라 할 수 있다. 또한 $a_1 \ge a_2 \ge \ldots \ge a_m \ge 0 > a_{m+1} \le \cdots \le a_n$ 이라 가정하여도 된다. 이때 $x_k = (-1)^{k+1}$ 로 잡으면 부등식이 성립한다. $s = \sum_{k=1}^{m} x_k a_k$, $t = -\sum_{k=m+1}^{n} x_k a_k$ 일 때 $0 \le s \le a_1 \le 1$ 이고 $0 \le t \le -a_n \le 1$ 이며 $\sum x_k a_k = s - t$, $\sum x_k b_k = 1 - s - t$ 이므로

$$|s - t| + |1 - s - t| \le 1$$

을 보이면 된다. 대칭성에 의해 $s \ge t$ 라 하면 $1 - s - t \ge 0$ 일 때와 $1 - s - t \le 0$ 일 때를 나누어 보이면 금세 증명할 수 있다. □

5. 함수 $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ 가 임의의 양수 x, y 에 대하여 조건

$$xf\left(x^2\right)f(f(y)) + f(yf(x)) = f(xy)\left(f\left(f\left(x^2\right)\right) + f\left(f\left(y^2\right)\right)\right)$$

를 만족한다고 가정하자. $P(1,1)$ 에서 $f(1) = 1$. $P(x,y)$ 의 우변이 대칭식이므로

$$xf\left(x^2\right)f(f(y)) + f(yf(x)) = yf\left(y^2\right)f(f(x)) + f(xf(y))$$

이 식을 조건 $Q(x,y)$ 라 하자. $Q(x,1)$ 에서 $f\left(x^2\right) = \frac{f(x)}{x}$. 이 조건을 $A(x)$ 라 하자. $P(x,1)$ 에서 위 결과를 사용하면 $f\left(f\left(x^2\right)\right) = \frac{f(f(x))}{x}$ 를 얻는다. 이 조건을 $B(x)$ 라 하자. 이제 $A(x)$ 와 $B(x)$ 를 적절히 사용하면,

$$f\left(f(x)^2\right) = \frac{f(f(x))}{f(x)} = f\left(f\left(x^2\right)\right) = f\left(\frac{f(x)}{x}\right)$$

를 얻는다. 이제 f 가 injective임을 보이자. $A(x)$ 오 $B(x)$ 를 이용해 $P(x,y)$ 를 다시 쓰면

$$f(x)f(f(y)) + f(yf(x)) = f(xy)\left(\frac{f(f(x))}{f(x)} + \frac{f(f(y))}{f(y)}\right)$$

$x = y$ 일 때, $A(x)$ 에 의하여,

$$f(xf(x)) = f(f(x))\left(\frac{2}{x} - f(x)\right)$$

이 식을 $C(x)$ 라 하자. 다시 $A(x)$ 에 의하여 $Q(x,y)$ 를 다시 쓰면

$$f(x)f(f(y)) + f(yf(x)) = f(y)f(f(x)) + f(xf(y))$$

어떤 x, y 에 대하여 $f(x) = f(y)$ 라고 가정하자. 그러면 위 식에서

$$f(yf(y)) = f(yf(x)) = f(xf(y)) = f(xf(x))$$

$C(x)$ 에서

$$f(f(y))\left(\frac{2}{y} - f(y)\right) = f(f(x))\left(\frac{2}{x} - f(x)\right)$$

따라서 $x = y$ 를 얻는다. 곧 f 는 injective이며 $f(x) = \frac{1}{x}$ 만이 가능하고, 이는 대입하면 해가 됨을 확인할 수 있다. □

6.

(a) $x = \lfloor\sqrt{n}\rfloor$ 이라고 하고, $n = x^2 + r$ 이라고 하자. 직관적으로 b 는 $(x^2+r)b^2 \approx (xb)^2$ 이면서 좌변이 $(xb)^2$ 보다 살짝 크지만, a 가 들어갈 틈이 있도록 b 를 또한 충분히 크게 잡는 것이 관건이다. $a = xb + k$ 라 하고, $(x^2+r)b^2 \approx (xb+k)^2$ 이면서 k 는 충분히 작음에 착한하면, $k \approx \frac{rb}{2x}$ 가 되도록 잡는 것이 관건이다.

r 이 짝수일 때는 $k = r/2$, $b = x$, $a = x^2 + r/2$. r 이 홀수일 때는 $k = \frac{1}{2}(r+1)$, $b = x+1$, $a = b^2 + b + \frac{1}{2}(r+1)$. 부등식은 쉽게 확인할 수 있다.

(b) 자연수 x 에 대하여 $n = x^2 + 1$ 에 대해서 언제나 조건을 만족한다. 임의의 $b \leq x$ 에 대하여,

$$(bx)^2 < b^2(x^2+1) \leq b^2(x^2+2) < (bx+1)^2$$

따라서 구간 $[b^2(x^2+1), b^2(x^2+2)]$ 에는 정수가 없다.

□

7. 당연히 2016개 이상의 항을 지워야 한다. 이제 다음 1008개의 부등식을 생각해 보자.

$$(x-1)(x-4) < (x-2)(x-3)$$
$$(x-5)(x-8) < (x-6)(x-7)$$
$$(x-9)(x-12) < (x-10)(x-11)$$
$$\vdots$$
$$(x-2013)(x-2016) < (x-2014)(x-2015).$$

이 부등식은 모두 성립하는 부등식이고, 모두 2016개의 변 중에서 각각의 실수 x에 대하여 영 이하의 값을 가지는 것은 최대 2개다. 어느 한 변이라도 0을 값으로 가진다면, 나머지 2015개의 항은 0이 아니므로 변끼리 곱했을 때 등호가 성립할 수 없다. 따라서 0이 되는 변이 존재하지 않는 x값에 대해서만 고려하자.

영 미만의 값을 가지는 것이 하나만 있을 때는 좌변끼리, 우변끼리 곱했을 때 값이 같아질 수 없다. 좌변끼리의 곱은 영 미만이고, 우번끼리 곱은 영 이상이기 때문이다.

이제 남은 것은 두 변이 영 미만이 되는 경우인데, 이 경우에는 어떤 $m = 1, 2, \ldots, 504$에 대하여 $x \in (4m-2, 4m-1)$가 성립할 때다. 이 범위에서 방정식

$$(x-1)(x-4)(x-5)(x-8)\cdots(x-2013)(x-2016) = (x-2)(x-3)(x-6)(x-7)\cdots(x-2014)(x-2015)$$

는

$$\frac{(x-4m+3)(x-4m)}{(x-4m+2)(x-4m+1)} = \prod_{j=1,\, j\neq m}^{504} \frac{(x-4j+2)(x-4j+1)}{(x-4j+3)(x-4j)}$$

와 같고, $x = 4m+t$, $1 < t < 2$라 놓고 분석해 보면,

$$\frac{(x-4m+3)(x-4m)}{(x-4m+2)(x-4m+1)} \geq 9$$
$$\prod_{j=1,\, j\neq m}^{504} \frac{(x-4j+2)(x-4j+1)}{(x-4j+3)(x-4j)} \leq \left(\prod_{k=0}^{\infty} \frac{(4k+2)(4k+3)}{(4k+1)(4k+4)}\right)^2$$

임을 알 수 있다. 따라서 우리는

$$\prod_{k=0}^{\infty} \frac{(4k+2)(4k+3)}{(4k+1)(4k+4)} < 3$$

임을 보이면 된다. 사실,

$$\prod_{k\geq 0} \frac{(4k+2)(4k+3)}{(4k+1)(4k+4)} < e.$$

을 쉽게 보일 수 있다. 이것은

$$\sum_{k\geq 0} \ln\left(1+\frac{2}{(4k+1)(4k+4)}\right) < 1 \ldots (*)$$

이 성립하고,

$$\sum_{k\geq 0} \frac{1}{(4k+1)(4k+4)} < \frac{1}{2}$$

이므로 $\ln(1+t) \leq t$에 의하여 성립하기 때문이다. $(*)$가 성립하는 것을 보이는 것은 여러가지 인데, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ 임을 사용하는 것이 가장 빠른 방법일 것이다. 이를 통하지 않더라도

$$\sum_{k\geq 0} \frac{1}{(4k+1)(4k+4)} < \frac{1}{4} + \frac{1}{16}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{5}{16}$$

처럼 하여도 된다. $\square$

8. 함수 $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$이 $f(0)\neq 0$이고 모든 실수 x, y에 대하여 조건

$$P(x,y):f(x+y)^2=2f(x)f(y)+\max\left\{f\left(x^2\right)+f\left(y^2\right),f\left(x^2+y^2\right)\right\}$$

를 만족한다고 가정하자. $P(0,0)$에서 $f(0)=-1$을 얻는다. 또, $P(x,0)$에서 $(f(x)+1)^2=f\left(x^2\right)+1$을 얻는다. 이 조건을 $Q(x)$라 하자. 우변은 기함수이무로, 따라서 모든 x에 대하여

$$f(x)=f(-x)\vee f(x)+f(-x)=-2$$

를 얻는다. 이제 $f(a)=f(-a)$, $f(a)+f(-a)\neq -2$, $f(b)\neq f(-b)$, $f(b)+f(-b)=-2$를 만족하는 실수 a, b가 존재한다고 가정해 보자. $ab\neq 0$, $f(a)\neq -1$, $f(-a)\neq -1$, $f(b)\neq -1$, $f(-b)\neq -1$임에 주목하라. $P(x,a)$와 $P(x,-a)$에서 $f(x+a)^2=f(x-a)^2$을 얻는다. 따라서 $f(x+a)=\pm f(x-a)$가 모든 x에 대하여 성립한다. 이는 $f(x+2a)=\pm f(x)$로 쓸 수도 있다. 이 식에서 $x=b, b=-2a-b$를 대입하여 $f(2a+b)=\pm f(b)$와 $f(-2a-b)=\pm f(-b)=\pm(-2-f(b))$를 얻는다. $f(b)\neq -1$이므로 $\pm(-2-f(b))$ 는 $\pm f(b)$와 다르다. 따라서 $f(2a+b)\neq f(-2a-b)$이다. 곧, $f(2a+b)+f(-2a-b)=-2$이다. $|f(b)|$와 $|f(-b)|$는 각각 $|f(2a+b)|$와 $|f(-2a-b)|$와 같음에 주목하라. $f(2a+b)=f(b)$, $f(-2a-b)=f(-b)$라는 결론을 얻을 수 밖에 없다.

수학적 귀납법으로 임의의 정수 k에 대하여

$$f(2ka+b)=f(b),\ f(2ka-b)=f(-b)$$

를 얻는다. $f(b)$, $f(-b)$둘 중 하나는 -1보다 작아야 한다. 일반성을 잃지 않고 $f(b)<-1$이라 하자. $Q\left(\sqrt{2ka+b}\right)$에서 k를 적당히 $2ka+b>0$이 되도록 선택하면

$$(f(x)+1)^2=f(2ka+b)+1=f(b)+1<0$$

이라 모순이다 따라서 그런 a, b는 존재하지 않는다.

i. $f(x)=f(-x)$ for every $x\in\mathbb{R}$. 어떤 $a\in\mathbb{R}$에 대하여 $x=y=\frac{a}{2}$, $x=-y=\frac{a}{2}$일때 $f(a)^2=f(0)^2=1$. $f(a)=\pm 1$임을 의미한다. 만일 $f(a)=1$이면 일반성을 잃지 않고 $a>0$이라 할 수 있고,

$$f(2\sqrt{a})^2=2f(\sqrt{a})^2+\max\{2,f(2a)\}=2f\left(\sqrt{a}\right)^2+2$$

이는 모순이다. 따라서 $f(x)=-1$이 성립한다.

ii. $f(x)+f(-x)-2$일 때 $P(-x,-y)$에서 $f(x+y)=f(x)+f(y)+1$을 얻는다. $g(x)=f(x)+1$로 치환하면, $g(x+y)=g(x)+g(y)$, $g(x)^2=g(x)^2$이므로 $g(x)=cx$이고 따라서 $f(x)=-1$, $f(x)=x-1$을 얻는다.

$\square$

9. $y_1=x_1-x_0$, $y_2=x_2-x_1$, $\cdots$, $y_n=x_n-x_{n-1}$라 하자. $x_k=y_1+\cdots+y_n$, 곧

$$\frac{1}{y_1}+\cdots+\frac{1}{y_n}\geq a\left(\frac{2}{y_1}+\frac{3}{y_1+y_2}+\cdots+\frac{n+1}{y_1+\cdots+y_n}\right).$$

$a = 4/9$이 최댓값임을 보이고자 한다. $n \to \infty$일때 $y_k = k(k+1)$를 고려하면 $x_k = \frac{1}{3}k(k+1)(k+2)$. 따라서

$$1 - \frac{1}{n+1} \geq a\left(\frac{3}{2}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)\right)$$

곧 $n \to \infty$일 때를 고려하면 $a \leq \frac{4}{9}$.

부등식을 보이기 위하여 코시 슈바르츠 부등식으로

$$\begin{aligned}
\frac{9}{y_1} &= \frac{9}{y_1} \\
\frac{1}{y_1} + \frac{9}{y_2} &\geq \frac{16}{y_1 + y_2} \\
\frac{4}{y_1 + y_2} + \frac{9}{y_3} &\geq \frac{25}{y_1 + y_2 + y_3} \\
\frac{9}{y_1 + y_2 + _3} + \frac{9}{y_4} &\geq \frac{36}{y_1 + y_2 + y_3 + y_4} \\
\frac{16}{y_1 + y_2 + y_3 + y_4} + \frac{9}{y_5} &\geq \frac{49}{y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5} \\
&\vdots \\
\frac{(n-1)^2}{y_1 + \cdots + y_{n-1}} + \frac{9}{y_n} &\geq \frac{(n+2)^2}{y_1 + \cdots + y_n}
\end{aligned}$$

모두 더하면 된다. □

증명.

$$\frac{k}{a_{k+1}} \leq a_k + \frac{k-1}{a_k}$$

$$a_k \geq \frac{k}{a_{k+1}} - \frac{k-1}{a_k}$$

전부 합하면

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_m \geq \frac{m}{a_{m+1}}$$

이제 수학적 귀납법을 적용하자. $n = 2$일 때는 성립한다. 이제 어떤 자연수 n에 대하여 조건이 성립한다고 하자. 만일 $a_{k+1} \geq 1$이면 귀납가정에서

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1} \geq n + 1$$

만일 $a_{n+1} < 1$이면

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1} \geq \frac{n}{a_{n+1}} + a_{n+1} > (n+1)$$

□

11. 조건 $P(x, y)$ 를 $f(x - f(y)) = f(f(x)) - f(y) - 1$라 하고, 모든 실수 x, y에 대하여 조건을 만족하는 함수 $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$가 존재한다고 하자. $P(x, f(x))$ 에서 -1이 치역의 원소임을 알 수 있다. $f(a) = -1$를 만족하는 정수 a를 정하자. $P(x, a)$ 에서 임의의 정수 x에 대하여

$$f(x+1) = f(f(x)) \tag{1}$$

가 성립함을 알 수 있다. $P(f(x)-1,x)$ 에서

$f(-1)=f(f(f(x)-1))-f(x)-1=f(f(x))-f(x)-1=f(x+1)-f(x)-1 \longrightarrow f(x+1)-f(x)=f(-1)+1$

따라서 f 는 선형이다. 곧, f 는 상수함수이거나 1-1함수이다. 만약 f 가 상수함수라면 항등적으로 -1 실제 이 함수는 주어진 조건을 만족한다. 만일 1-1이라면 식 (1) 에서 $x+1=f(x)$ 을 얻고 이 또한 해가 된다. □

12.

$$X=f(x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_{2n})=\sum_{1\le r<s\le 2n}(s-r-n)x_r x_s$$

이라 하자. f 는 각각의 x_j $(j=1,2,\ldots,2n)$ 에 대하여 선형이기 때문에, 최댓값을 구하는 데 $x_j\in\{-1,1\}$ $(j=1,2,\ldots,2n)$ 인 경우만 고려해도 충분하다.

$y_j=x_1+x_2+\cdots+x_j-x_{j+1}-x_{j+1}-\cdots-x_{2n}$ $(j=1,2,\ldots,2n)$ 라고 하면

$$\sum_{j=1}^{2n} y_j^2=4n^2+\sum_{1\le r<s\le 2n} C_{r,s}x_r x_s$$

$$\begin{aligned}C_{r,s}=&\sum_{j+1\le r}2-\sum_{r\le j<s}2+\sum_{s\le j}2\\ =&2(r-1)-2(s-r)+2(2n-s+1)=-4(s-r-n)\end{aligned}$$

곧,

$$\sum_{j=1}^{2n} y_j^2=4n^2-4X$$

그런데 y_j 는 모두 짝수이고, $y_{j+1}-y_j=2x_{j+1}$ 이므로 $y_j^2+y_{j+1}^2\ge 4$ 이다. 따라서

$$\sum_{j=1}^{2n} y_j^2=\sum_{k=1}^{n} y_{2k-1}^2+y_{2k}^2\ge 4n$$

곧, $X\le n^2-n$ 임을 알 수 있다. 등호는 $x_j=(-1)^j$ 일 때 성립한다. 따라서 최댓값은 n^2-n 일 때 성립한다. □

13. 함수 $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ 이 임의의 실수 $x,\, y$ 에 대하여 조건 $P(x,y)\,:\, f(x+f(x+y))+f(xy)=x+f(x+y)+yf(x)$ 를 만족한다고 가정하자.

Step 1 $P(x,1)$ 에서 $x+f(x+1)$ 이 임의의 실수 x 에 대하여 고정점임을 알 수 있다.

Step 2 $P(0,y)$ 에서 $f(f(y))+f(0)=f(y)+yf(0)$ 이고, 만일 α 가 고정점이라면 $f(0)\alpha=f(0)$ 이다. 만일 $f(0)\ne 0$ 라면 고정점은 필연적으로 1 이며 이는 $x+f(x+1)=1$ 임을 뜻하여, $f:x\mapsto 2-x$ 를 얻는다.

Step 3 이제 $f(0)=0$ 인 경우를 고려하자. 또, $P(-1,1)$ 에서 $f(-1)+=-1$ 을 얻는다. 이제 $P(1,-1)$ 에서 $f(1)=1$ 을 얻는다.

Step 4 $P(x+1,0)$ 에서 $x+f(x+1)+1$ 이 고정점이다. 따라서 $P(1,y)$ 에서

$$f(1+f(y+1))+f(y)=1+f(y+1)+y$$

따라서 α 아 $\alpha+1$ 이 모두 고정점이면 $\alpha+2$ 또한 고정점이다.

앞서서 $x+f(x+1)$, $x+f(x+1)+1$ 가 고정점임을 알았으니, 임의의 x 에 대하여

$$f(x+f(x+1)+2)=x+f(x+1)+2$$

가 성립함을 알 수 있다.

Step 5 이제 $P(x,-1)$ 에서 $f(x+f(x-1))=x+f(x-1)-f(x)-f(-x)$ 따라서 f 는 기함수임을 알 수 있다.

Step 6 f 가 기함수임을 이용하여 $P(x,y)$ 와 $P(-x,-y)$ 에서 $f(xy)=yf(x)$ 를 얻고, 특히 $x=1$ 일 때 $f(y)=y$ 를 얻는다.

Step 7 종합 하면 함수 f 는

$$x\mapsto 2-x,\ x\mapsto x$$

두 개를 얻는다. 이는 모두 $P(x,y)$ 를 만족하기 때문에 구하는 함수는 정확히 이 두 개임을 알 수 있다.

□

해설. Step 3에서 $P(x,0)$ 이 아니고 $P(x+1,0)$ 을 대입한 것은 고정점의 모양을 맞추기 위해서다. □

14. 함수 $f:\mathbb{Z}\longrightarrow\mathbb{Z}$ 가 모든 정수 x, y 에 대하여 조건

$$P(x,y): f(x+f(x)+y)+f(x-f(x)-y)=f(x+y)+f(x-y)$$

를 만족한다고 가정하자. $P(x,a-x)$ 에서 $f(a+f(x))-f(a)=f(2x-a)-f(2x-a-f(x))$.
임의의 정수 m 에 대하여 함수의 집합 $\mathbb{Z}\longrightarrow\mathbb{Z}$ 에서 $\mathbb{Z}\longrightarrow\mathbb{Z}$ 로 연산

$$\Delta_m: h\mapsto\Delta_a h$$

를 $\Delta_m h: x\mapsto h(x+m)-h(x)$ 라고 하자. 우선,

$$\Delta_{f(x)}f(a)=-\Delta_{-f(x)}f(2x-a)$$

를 얻는다. 이 조건을 $P'(x,a)$ 라 하자.

Step 1 정수 A, x, 양의 정수 n 에 대하여

$$\Delta_{nA}f(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\Delta_A f(x+kA)$$

따라서

$$\Delta_{nf(x)}f(a)=-\Delta_{-nf(x)}f(2x-a)$$

를 얻는다. 이는 n 이 일반적인 정수일 때도 성립한다. 곧, $f(x)|M$ 이면

$$\Delta_M f(a)=-\Delta_{-M}f(2x-a)$$

또, $\Delta_{-m}f(x)=f(x-m)-f(x)=-\Delta_m f(x-m)$ 이므로 위 식은

$$\Delta_M f(a)=\Delta_M f(2x-a-M)$$

으로도 쓸 수 있다.

Step 2 정수 x, y에 대하여 $f(x)|L$, $f(y)|L$이라 하자. 그러면

$$\Delta_L f(a) = -\Delta_{-L} f(2x - a) = \Delta_L f(2y - 2x + a)$$

따라서, L이 $f(x)$와 $f(y)$의 공배수이면 $\Delta_L f$는 $2y - 2x$를 주기로 가진다는 것을 알 수 있다.

Step 3 Q가 $f(0)$와 $f(1)$의 최소공배수라 하자. $\Delta_Q f$는 주기 2인 함수로 함숫값이 argument 의 홀짝성에 의존한다. 그런데 $\Delta_Q f(0) = -\Delta_{-Q} f(0) = \Delta_Q f(-Q)$이므로 결국 $\Delta_Q f$는 상수다.

Step 4 임의의 정수 m, n에 대하여 $\Delta_m \Delta_n = \Delta_n \Delta_m$이다.

$$\Delta_m \Delta_n f(x) = \Delta_n f(x+m) - \Delta_n f(x) = f(x+m+n) - f(x+m) - f(x+n) - f(x)$$

가 m, n에 대하여 대칭이기 때문이다.

Step 5 $\Delta_Q f$가 상수이므로 $\Delta_1 \Delta_Q f = 0$이다. 여기서 0는 항등적으로 0을 함숫값으로 가지는 상수 함수를 뜻한다. 이는 곳 $\Delta_Q \Delta_1 f = 0$임을 뜻하고, 곧 $\Delta_1 f$가 Q를 주기로 한다는 것을 뜻하며, $Q \neq 0$이므로 $\Delta_1 f$는 주기함수다. 이 함수의 기본 주기를 T라 하자. 곧, $\Delta_T \Delta_1 f = 0$을 만족하는 최소의 자연수를 T라 하자. 임의의 정수 m에 대하여 $\Delta_m f$는 $\Delta_1 f$를 평행이동한 것들의 합으로 표현할 수 있으므로 주기 T인 함수가 된다.

Step 6 $\forall x \in \mathbb{Z}, T|f(x)$ 임을 보이자. 이를 보이기 위하여 어떤 소수 p와 정수 u가 존재하여 $p^\alpha \mid T$이지만, $p^\alpha \nmid f(u)$라고 가정하자. $P(u, 0)$에서 $2f(u) = f(u + f(u)) + f(u - f(u))$. 따라서 $v = u \pm f(u)$중에서 적어도 하나는 $p^\alpha \nmid f(v)$이다. $L = \mathrm{LCM}(f(u), f(v))$라고 하자. $|u - v| = f(u)$. 따라서 step 2에 의하여 $\Delta_{2f(u)} \Delta_L f = 0$이다. 따라서 $\Delta_L f$는 $\mathrm{GCD}(T, 2f(u))$인 함수다. 곧 $\Delta_{\mathrm{GCD}(T,2f(u))} \Delta_L f = 0$이므로 $\Delta_{\mathrm{GCD}(T,2f(u))} f$는 $\mathrm{GCD}(L, T)$주기인 함수다. $p^\alpha \nmid L$이므로 $\mathrm{GCD}(T, 2f), \mathrm{GCD}(T, L)|T/p$. 따라서

$$\begin{aligned}
&\Delta_{\mathrm{GCD}(T,2f(u))} \Delta_{\mathrm{GCD}(T,L)} f = 0 \\
\Longrightarrow\ &\Delta_{T/p} \Delta_{\mathrm{GCD}(T,L)} f = 0 \\
\Longrightarrow\ &\Delta_{\mathrm{GCD}(T,L)} \Delta_{T/p} f = 0 \\
\Longrightarrow\ &\Delta_{T/p} \Delta_{T/p} f = 0
\end{aligned}$$

따라서 $\Delta_{T/P} \Delta_{T/p} \Delta_1 f = 0$. 따라서 $\Delta_{T/p} \Delta_1 f$는 T/p 주기함수다. 따라서

$$\Delta_T \Delta_1 f(x) = \sum_{k=0}^{p-1} \Delta_{T/p} \Delta_1 f(x + kT/p)$$

에서 우변의 항들은 모두 같은 값인데 $\Delta_T \Delta_1 f = 0$이므로 그 값들은 모두 0이다. 곧, $\Delta_{T/p} \Delta_1 f = 0$이다. 그런데 이는 $\Delta_1 f$의 기본주기가 T라는데 모순이다. 따라서 $\forall x \in \mathbb{Z}, T|f(x)$가 증명되었다.

Step 7 이제 $\Delta_T f$는 상수이고 짝수이며 T의 배수이므로, 그 값을 $2Tk$라 하자. 또, $r = 0, 1, 2, \ldots, T-1$에 대하여 $f(r) = l_r T$라 할 때, 임의의 정수 x에 대하여 x를 T로 나눈 몫을 q, 나머지를 r이라 하면

$$f(x) = f(qT + r) = (2kq + l_r)T$$

임을 알 수 있다.

Step 8 실제 이런 함수는 조건을 만족한다. 왜냐하면, 조건은 $\Delta_1 \Delta_{f(x)} f = 0$이면 충분히 만족되는데, $T|f(x)$이므로 이것이 성립하기 때문이다.

□

15. Step 1 편의상 $2015 = k = 2l + 1$ 이라 하자. 임의의 다항식 $F(x)$ 에 대하여 다항식 ΣF 를 다음과 같이 정의한다.

> ΣF 는 임의의 영이상의 정수 n 에 대하여
> $$\Sigma F(n) = \sum_{i=1}^{n} F(i)$$
> 를 만족하는 유일한 다항식이다.

비슷하게, 다항식 $F(x)$ 에 대하여 다항식 ΔF 를 다음과 같이 정의한다.

> ΔF 는 임의의 정수 n 에 대하여
> $$\Delta F(n) = F(n) - F(n-1)$$
> 을 만족하는 유일한 다항식이다.

다음 성질에 주목하자.

- $\Sigma F(0) = 0$
- $F(x)$ 가 항등적으로 0 이 아닌 이상, $\deg(\Sigma F(x)) = \deg(F) + 1$ 이다.
- $F(x) = \Delta\Sigma F(x)$
- 임의의 실수 x 에 대하여 $\Delta F(x) = F(x) - F(x-1)$

마지막 성질에 대해서 $\Delta F(x) = J(x)$ 라 할 때, $J(n) = F(n) - F(n-1)$ 이 모든 정수 n 에 대해서 성립하므로 $J(x) = F(x) - F(x-1)$ 이 항등식이 된다.

Step 2 지금부터 $P(x)$ 와 $Q(x)$ 가 n 차의 서로 다른 블록-닮음 다항식이라 하자. $R(x) = P(x) - Q(x)$ 라 하자. $\Sigma R(x)$ 는 항등적으로 0 일 수 없다. 왜냐하면 $\Sigma R(x)$ 가 항등적으로 0 이면 임의의 정수 n 에 대하여 $R(n) = \Delta\Sigma R(n) = 0$ 이 되어 $P = Q$ 가 되기 때문이다. 각각의 $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ 에 대하여 $\Sigma R(ki) = 0$ 이다. 곧, $T(x) = x(x-k)(x-2k)\ldots(x-nk)$ 라고 할 때, $T(x)|\Sigma R(x)$ 이다. $R(x)$ 의 차수를 m 이라 하면, $m \le n$ 이고 $T(x)$ 는 차수가 $n+1$ 이므로 $\Sigma R(x)$ 는 정확히 $n+1$ 차 다항식이다. $P(x)$ 와 $Q(x)$ 에 0 이 아닌 상수를 곱해서 얻어지는 다항식도 역시 n 차의 서로 다른 블록-닮음 다항식이므로, 일반성을 잃지 않고 $\Sigma R(x) = 2T(x)$ 라고 할 수 있다. 따라서 $R(x) = 2T(x) - 2T(x-1)$ 이다.

Step 3 이 step 에서만 잠깐 (a) 를 해결하기 위하여 $T(x)$, $T(x-1)$ 을 생각하자. 또, 각각의 자연수 i 에 대하여 $I_i = \{ki, ki-1, ki-2, \ldots, k(i-1)+1\}$ 이라 하자. I_i 위에서 $T(x)$ 아 $T(x-1)$ 의 값을 나열해 보면, 첫 행에 x 값, 둘째 행에 $T(x)$ 값, 셋째 행에 $T(x-1)$ 값을 쓴다고 할 때,

$$\begin{array}{ccccc} ki & ki-1 & \ldots & k(i-1)+2 & k(i-1)+1 \\ 0 & T(ki-1) & \ldots & T(k(i-1)+2) & T(k(i-1)+1) \\ T(ki-1) & T(ki-2) & \ldots & T(k(i-1)+1) & 0 \end{array}$$

따라서 $T(x)$ 와 $T(x-1)$ 이 바로 $n+1$ 차의 블록-닮음 다항식이다.

Step 4 이 step에서 핵심적인 사항은 $S(x) = P(x) + Q(x)$ 라고 할 때, 이것이 상수임을 보이는 것이다. $S(x)$ 가 상수가 아니라고 가정하자. $P(x)^2$ 과 $Q(x)^2$ 또한 블록-닮음이므로, $T(x)|\Sigma SR(x)$ 이다. 따라서 $\Sigma SR(x) = H(x)T(x)$ 를 만족하는 다항식 H 가 존재한다. 이때, $\deg(H) = \deg(S) + \deg(R) + 1 - \deg(T) \leq n + n + 1 - (n+1) = n$ 이다. 또, $\deg(H) \geq 1 + n + 1 - (n+1) = 1$. 따라서 H 또한 상수가 아니다. 또, $S(x)R(x) = H(x)T(x) - H(x-1)T(x-1)$ 이다.

$$2S(x)\left(T(x) - T(x-1)\right) = H(x)(T(x) - T(x-1)) + \left(H(x) - H(x-1)\right)T(x-1)$$

따라서 $T(x) - T(x-1)|\left(H(x) - H(x-1)\right)T(x-1)$ 인데,

$$\gcd\left(T(x) - T(x-1), T(x-1)\right) = \gcd\left(T(x), T(x-1)\right) = 1$$

마지막 등식은 $T(x)$ 가 일차식으로 인수분해되며, $T(x)$, $T(x-1)$ 는 공통인 일차인수가 하나도 없기 대문이다. 따라서 $T(x) - T(x-1)|H(x) - H(x-1)$ 인데, 좌변은 차수가 정확히 n 이고, 우변은 차수가 $n-1$ 이하이기 때문에 $H(x)$ 가 상수가 아니라는 데 모순이다. 곧, S 는 상수이다.

Step 5 S 는 상수이다. 이 값을 α 라 할 때 $P(x)$ 와 $Q(x)$ 를 각각 $P(x) - \frac{\alpha}{2}$, $Q(x) - \frac{\alpha}{2}$ 로 바꾸어도 여전히 이들은 차수가 n 인 블록-닮음이고, 서로 다르며 그 차는 $2T(x)$ 이다. 다만, 그 합은 이제 0 이다. 곧, $P(x) = T(x) - T(x-1)$, $Q(x) = -P(x)$ 를 얻는다. 각각의 $i = 1, 2, \ldots, n$ 에 대하여 $P(x)$ 는 I_i 위에서 같은 개수의 음수와 양수를 가진다. 그런데 I_i 의 원소의 개수는 홀수이므로 그 중 한 원소에 대한 값은 0 이다 $P(x)$ 의 차수는 n 이고, 이런식으로 I_i 위에서 하나 이상의 영점을 가지기 때문에, 사실 정확히 하나의 영점을 각각의 I_i 마다 가지게 된다. 실수 전 구간에서도 다른 영점은 존재할 수 없다. 따라서 I_i 위에서 영점 좌우에서의 부호의 변화를 제외하고 다른 부호의 변화는 있어서는 안 된다. 곧, I_i 의 중앙값에서 영점을 가지게 된다.

Step 6 I_1 에서 이 현상을 살펴보자. I_1 의 중앙값은 $l+1$ 이다. 따라서 $P(l+1) = 0$, 곧 $T(l+1) = T(l)$ 이 된다. 그런데

$$|T(l+1)| = (l+1)l\prod_{i=2}^{n}(ik - l - 1) < l(l+1)\prod_{i=2}^{n}(ik - l) = T(l)$$

이므로 이는 성립하지 않는다. 이로써 증명이 완료된다.

□

16. $n \geq 0$ 에 대하여 $S_n = \sum_{k=0}^{n} z_k$ 라 하자.

그러면 $n \geq 1$ 일 때,

$$z_n < \frac{z_0 + z_1 + \cdots + z_n}{n} \leq z_{n+1}$$

는 $T_n = (n-1)S_n - nS_{n-1}$ 이라 하면, $T_n < 0 \leq T_{n+1}$ 과 같은 조건이다. $T_1 = -S_0 < 0$. $T_{n+1} - T_n = n\left(s_{n+1} + S_{n-1} - 2S_n\right) = n\left(z_{n+1} - z_n\right) > 0$. 따라서 $T_n < 0 \leq T_{n+1}$ 을 만족하는 n 은 기껏해야 한 개 있으며, T_n 은 정수 수열이므로, 언젠가는 0 이 넘는다. □

17. $a_{n-1} < \dfrac{1}{2}$ 라 하면, $a_n > a_{n-1}$ 이다. 또한 $a_{n-1} \geq \dfrac{1}{2}$ 일 때는 $a_n < a_{n-1}$ 이다. 이는 b_n 에 대해서도 마찬가지로 성립한다. 이제 $I = \left(0, \dfrac{1}{2}\right)$, $J = \left[\dfrac{1}{2}, 1\right)$ 라고 할 때 문제는 어떤 영 이상의 정수 n 에 대하여 a_n 과 b_n 이 I 와 J 에 각각 포함되는 경우가 존재함을 보이라는 것이다.

그렇지 않고 a_n과 b_n이 항상 I 또는 J에 함께 들어있다고 가정해 보자. $d_n = |a_n - b_n|$이라 할 때, $a_n \in I$일 때는 $d_{n+1} = d_n$이다. $a_n \in J$일 때는 $d_{n+1} = (a_n + b_n)\, d_n > d_n$이다. 따라서 d_n은 단조증가 한다. 또한, a_n은 두 번 연속 I에 머물 수 없으므로 d_n은 두 번 연속 증가하지 않을 수 없고, 또한, $a_n \in J$일 때는

$$d_{n+1} = (a_n + b_n)\, d_n \geq (1 + d_0)\, d_n$$

이 성립한다. 따라서 짝수인 n에 대하여 $d_n \geq (1 + d_0)^{\frac{n}{2}} d_0$이며 이는 모순이다.

주어진 명제가 증명되었다. □

18. 서연이가 정렬한 낮은 가격 수열을 $d_1, d_2, \ldots, d_n$이라 하자. 민준이가 정렬한 낮은 가격 수열을 $g_1, g_2, \ldots, g_n$이라 하자. M은 x_i $(1 \leq i \leq n)$의 최댓값, $S = |x_1 + x_2 + \cdots + x_n|$이라 하자. 우선 $D \geq S$이다. 또, 어떤 i에 대하여 $M = |d_i|$인데, 이때

$$M = |d_i| = |(d_1 + d_2 + \cdots + d_i) - (d_1 + d_2 + \cdots + d_{i-1})| \leq |d_1 + \cdots + d_i| + |d_1 + \cdots + d_{i-1}| \leq 2D$$

$N = \max\{M, S\}$라 하고 $G \leq N$임을 보이자. 곧, $h_i = g_1 + g_2 + \cdots + g_i$일 때, $|h_i| \leq N$임을 보이면 된다. 이 조건을 $P(i)$라 하자.

1. $|h_1| \leq M \leq N$이므로 $P(1)$이 성립한다.
2. $2 \leq i \leq n$을 만족하는 정수 i에 대하여 $P(i-1)$가 성립한다고 가정하자.

   i. $g_i, g_{i+1}, \ldots, g_n$중 어떤 두 개도 서로 다른 부호가 아닐 때. 그 모두가 영 이상이라고 하여도 일반성을 잃지 않는다. 그러면

   $$h_{i-1} \leq h_i \leq \cdots \leq h_n$$

   이 성립하기 때문에,

   $$|h_i| \leq \max(|h_{i-1}|, |h_n|) \leq N$$

   ii. g_i, g_{i+1}, $\ldots$, g_n 중에서 서로 다른 부호의 실수가 한 쌍이상 존재할 때. 어떤 $j \geq i$가 존재하여 $h_{i-1} g_j \leq 0$.

   $$|h_i| = |h_{i-1} + g_i| \leq |h_{i-1} + g_j| \leq \max(|h_{i-1}|, |g_j|) \leq N$$

이상에서

$$G \leq N \leq 2D$$

이므로 $c \leq 2$임을 알 수 있다.

이제 $n = 4$일 때 수열 $1, -1, 2, -2$를 생각하면, c의 최솟값이 2임을 알 수 있다. □

참고. 각각의 자연수 n에 대하여, c_n을 다음이 만족하는 최소의 상수라 하자.

> 모든 n개 주어진 실수에 대하여, 민준이가 얻을 수 있는 모든 수열에 대하여 $G \leq cD$가 성립한다.

$c_1 = c_2 = 1$이고, $c_3 = \dfrac{3}{2}$, $n \geq 4$일 때 $c_n = 2$이다. □

19. $C = 2014$라 하자. 함수 $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$가 모든 정수 m, n에 대하여 조건

$$P(m,n) : f(f(m)+n) + f(m) = f(n) + f(3m) + C$$

를 만족한다고 가정하자. 함수 $g : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$를 $g(m) = f(3m) - f(m) + 2C$라 하자. $P(m,n)$에서

$$f(f(m)+n) = g(m) + f(n)$$

수학적 귀납법으로 임의의 정수 t, m, n에 대하여 조건

$$N(m,n,t) : f(t(f(m)+n)) = tg(m) + g(n)$$

을 얻는다. $N(r,0,f(0))$와 $N(0,0,f(r))$에서

$$f(0)g(r) = g(0)f(r)$$

만일 $f(0) = 0$이면 $g(0) \neq 0$이므로 $f(r) = 0$인데 이는 모순이다. 따라서 $f(0) \neq 0$. 곧, $g(r) = \alpha f(r)$, $\alpha = \frac{g(0)}{f(0)}$를 얻는다. 따라서 우리는

$$f(3m) = (1+\alpha)f(m) - 2C$$

를 얻고, 이로써 $\beta = \frac{2C}{\alpha}$일 때

$$f\left(3^k m\right) - \beta = (1+\alpha)^k (f(m) - \beta)$$

를 얻을 수 있다. $3 \nmid 2014$이므로 어떤 a에 대하여 $d = f(a)$는 3의 배수가 아니다. 이제 $K(a,n,t)$에서

$$f(n+td) = f(n) + \alpha td$$

$d | \left(3^k - 1\right)$을 만족하는 k를 택하자.

$$f\left(3^k m\right) = f\left(m + \left(3^k - 1\right)m\right) = f(m) + \alpha\left(3^k - 1\right)m$$

따라서

$$\left((1+\alpha)^k - 1\right)(f(m) - \beta) = \alpha\left(3^k - 1\right)m$$

따라서 f는 선형함수다. $f(x) = Ax + B$를 주어진 조건에 대입하면 $A = 2$, $B = \frac{C}{2}$를 구할 수 있다. □

20.

Step 1 먼저 $P(0) < 0$은 모두 가능하다. 양수 c에 대하여 $P(x) = -kx^2 - c$라 할 때, 판별식을 이용하면 $k > \frac{1}{c}$이면 언제나 좌우변이 거짓이 됨을 알 수 있다.

Step 2 $P(0) = 0$은 불가능하다. $P(0) = 0$이라 하고, $l = \lim_{x \to 0} \frac{P(x)}{x}$라고 하자.

(a) $|l| < 2$일 때. $y = x^3$, $x \to 0$일 때

$$\frac{\left|y^2 - P(x)\right|}{|x|} \to |l| < 2, \ \frac{\left|x^2 - P(x)\right|}{|y|} \to \infty$$

좌변은 참이고 우변은 거짓으로 수렴하여 성립하지 않는다.

(b) $|l| > 2$일 때, $x = \operatorname{sgn}(l)t$, $t \to 0^+$, $y = \sqrt{lx}$일 때 모순이 나타난다.

(c) $l = 2$일 때. TBA

Step 3 $P(0) > 0$일 때. 만일 $P(x)$의 최고차항의 계수가 음수라면 $P(x) = 0$는 양의 영점 x_0를 가진다. 이때, $x \to x_0$, $y = 0$일 때 $x^2 = P(0)$가 성립해야하므로 모순이다. 따라서 $P(x)$의 최고차항의 계수는 양수다.

이제 $\deg P(x) > 2$일 때, 부등식 $\left|\frac{y^2}{x} - \frac{P(x)}{x}\right| \le 2$에서 $x \to \infty$, $y = \sqrt{P(x)}$일 때 결국(eventually) 성립하지만, $\left|\frac{x^2}{y} - \frac{P(y)}{y}\right| \le 2$는 성립하지 않는다. 따라서 $P(x)$의 차수는 2 이하 이다. 일차식은 근이 있어서 위와같이 하여 불가능하다는 것을 알 수 있고, 따라서 $P(x) = ax^2 + bx + c$꼴만이 남았다. 이 경우 같은 방법으로 $a = 1$임을 알 수 있다. 대칭성에서 $b = 0$이고 $x^2 + c$만이 남았다. 이제 $c = 1$계산을 통해 $c = 1$임을 알 수 있다.

□

21. 함수 $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$가 임의의 정수 $n \in \mathbb{Z}$에 대하여 조건 $P(n) : n^2 + 4f(n) = f(f(n))^2$를 만족한다고 가정하자.

Step 1 $a_0 = 1, a_{n+1} = f(a_n), n = 0, 1, 2, \ldots$라고 할 때, $a_{n+2}^2 = 4a_{n+1} + a_n^2$이므로 $a_2 = 2r+1$, $r \in \mathbb{Z}$이고 따라서 $a_1 = r^2 + r$, $a_3^2 = (r_2 + r)^2 + 8r + 4$이다. $2|a_3$이고 $a_3^2 \ne \left(r^2 + r\right)$이다. $a_3 = r^2 + r \pm 2$를 만족하는 r값은 $r = -3, 0, 1$이다. $\left|a_3 - \left(r^2 + r\right)\right| \ge 4$일 때는

$$\left|a_3^2 - \left(r^2 + r\right)\right|^2 \ge 8r^2 + 8r - 16$$

이므로 만족하는 r은 ± 1인데, $r = -1$이면 $a_3^2 = -4$라서 모순이다. 또한 $r = -3$이면, $a_1 = 6$, $a_2 = -5, a_3 = -4, a_4 = -3, a_5 = -2, a_6 = -1, a_7 = 0, a_8 = 1, a_9 = 2 = f(1) = a_1 = 6$이므로 모순이다. $r = 0$이면 $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_3 = \pm 2$. 그런데 $a_3 = f(1) = a_1 = 0$이므로 모순이다. 따라서 $r = 1$이 유일한 가능성이다.

Step 2 이제 수학적 귀납법으로 $a_n = n + 1$임을 보이자. $n = 0, 1, 2$인 경우는 보여진다. 이제 $k > 3$인 어떤 k에 대하여 $n < k$이면 언제나 $a_n = n + 1$이라고 가정하자. $a_k = \pm(k + 1)$이다. 만일 $a_k = -k - 1$이라면 $a_{k+1}^2 = 4a_k + a_{k-1}^2$에서 $a_{k+1}^2 = (k - 2)^2 - 8$이다. 따라서 $k = 5$. 그런데 이 경우 $a_7 = 36 \pm 4$가 되어 불가능함을 알 수 있다. 따라서 $a_n = n + 1$이 $n \ge 0$일 때 성립하며, 이는

$$n \ge 1 \implies f(n) = n + 1$$

임을 의미한다.

Step 3 $P(0)$에서 $4f(0) = f(f(0))^2$이므로 $f(0) \ge 0$이다. $f(0) = 0$이라고 해 보자. 그러면 $f(n) = 0$이라면 $n^2 = n^2 + 4f(n) = f(f(n))^2 = f(0)^2 = 0$이라서 $n = 0$이다.

이제 $f(0) > 0$이라고 해 보자. $P(0)$에서 $4f(0) = f(f(0))^2 = (f(0) + 1)^2$이므로 $f(0) = 1$이다. 요약하면, 다음과 같다.

$$f(0) = 1 \vee (f(0) = 0 \wedge \forall n(f(n) = 0 \leftrightarrow n = 0))$$

Step 4 이제 $n \ge 1$일 때 $f(-n) = 1 \pm n$임을 보이려고 한다. 이 조건을 $Q(n)$이라 하자. $P(-1)$에서 $1 + 4f(-1) = f(f(-1))^2$. 따라서 $f(-1) \ge 0$. 이제 $f(-1) \ne 0$이라면 $f(-1) > 0$이다.

$$1 + 4f(-1) = (f(-1) + 1)^2$$

이고 이를 풀면 $f(-1) = 2$를 얻는다. 곧 $Q(1)$이 증명되었다.

이제 어떤 자연수 $n \geq 2$에 대하여 $k < n$인 모든 자연수 k에 대하여 $Q(k)$가 성립한다고 가정해 보자. 귀납가정을 사용하기 위하여 먼저 $f(-n) > -n$임을 보이자. 이를 위하여 $f(-n) \leq -n$이라고 가정해 보자.

$$f(f(-n))^2 = n^2 + 4f(-n) \leq n^2 - 4n < (n-2)^2$$

따라서 이 경우는 $n \geq 3$만 가능하며, $|f(f(-n))| \leq n - 3$이다.

(a) $f(f(-n)) > 0$인 경우. $f(f(f(-n))) = f(f(-n)) + 1$. 또, $P(f(-n))$에서 $f(-n)^2 + 4f(f(-n)) = f(f(f(-n)))^2 = (f(f(-n)) + 1)^2$

(b) $f(f(-n)) = 0$인 경우. $f(-n) \neq 0$이므로, $f(0) = 1$이고 따라서 $f(f(f(-n))) = 1$이다. 따라서 $f(-n)^2 + 4f(f(-)) = 1^2 = (f(f(-n)) + 1)^2$.

(c) $f(f(-n)) < 0$인 경우. $0 < -f(f(-n)) \leq n - 3$이므로 귀납 가정에서 $f(-n)^2 + 4f(f(-n)) = f(f(f(-n)))^2 = (1 \pm f(f(-n)))^2$

따라서 어느 경우이던지 $f(-n)^2 + 4f(f(-n)) = (1 \pm f(f(-n)))^2$이 공통적으로 성립한다. 그런데,

$$n^2 \leq f(-n)^2 = (1 \pm f(f(-n)))^2 - 4f(f(-n))^2 \leq f(f(-n))^2 + 6\,|f(f(-n))| + 1 = n^2 - 8$$

이라서 모순이다. 곧 $f(-n) > -n$이다.

(a) $f(-n) > 0$인 경우. $P(-n)$에서

$$n^2 + 4f(-n) = f(f(-n))^2 = (f(-n) + 1)^2$$

따라서 $f(-n) = 1 + n$이다.

(b) $-n < f(-n) \leq 0$인 경우. $f(-n) = 0$이라면, $f(0) = 1$이고 따라서 $f(f(-n)) = 1$. 따라서 $P(-n)$에서 $n^2 = 1^2$이므로 모순이다. 따라서 $-n < f(-n) < 0$. $P(-n)$과 귀납가정에서

$$(-n)^2 + 4f(-n) = (1 \pm f(-n))^2$$

$(-n)^2 + 4f(-n) = (1 - f(-n))^2$일 때는 $n^2 = (f(-n) - 3)^2 - 8$이고, 이는 $n = 1$일 때만 성립하므로 모순이다. 따라서 $(-n)^2 + 4f(-n) = (1 + f(-n))^2$인데 이는 $n^2 = (f(-n) - 1)^2$임을 의미하므로 $Q(n)$이 성립한다.

Step 5 임의의 정수 m에 대하여 $K(m) : f(m) = m + 1 \implies f(m+1) = m + 2$를 보일 것이다. 먼저 $m \geq 0$일 때는 자명하게 성립한다. 이제 자연수 n에 대하여 $K(-n)$을 증명할 것이다. $K(-1)$을 보이기 위하여, $f(-1) = 0$이라 가정해 보자. 그렇다면 $f(0) = 1$이기 때문에 $n = 1$일 때 $K(-n)$이 성립함을 보였다.

이제 $n \geq 2$일 때, $K(-n)$을 보이기 위하여, $f(-n) = -n + 1$이라고 가정하자.

$$f(-n+1)^2 = f(f(-n))^2 = (-n)^2 + 4f(-n) = (n-2)^2$$

따라서 $f(-n+1) = \pm(n-2)$가 성립한다.

만일 $f(-n+1) \neq 2 - n$이라면, $f(-n+1) = n - 2$이고, $n - 2 = 1 \pm (n-1)$이 되어야 한다. 곧, $n - 2 = 2 - n$. 이는 $f(-n+1) = 2 - n$을 의미하여 모순이다. 따라서 $f(-n+1) = 2 - n$이다.

Step 6 우선 모든 정수 n에 대하여 $f = f_+ : n \mapsto n+1$일 수 있다. 이제 어떤 정수 n에 대하여 $f(n) \neq n+1$이라고 해 보자. 그렇다면, 이를 만족하는 최대의 정수 m이 존재한다. 또한 $m \leq 0$이다.

(a) $m = 0$인 경우. $f = f_0 : x \mapsto \begin{cases} x+1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1-x & x < 0 \end{cases}$

(b) $m < 0$인 경우. $f = f_m : x \mapsto \begin{cases} x+1 & x > 0 \\ 1-x & x \leq m \end{cases}$

Step 7 이제 이 함수들이 실제 해가 된다는 것을 보일 것이다. 먼저

$$n^2 + 4f_+(n)^2 = n^2 + 4(n+1) = (n+2)^2 = f_+\left(f_+(n)\right)^2$$

이므로 $f = f_+$는 해가 된다. 또,

$$f_0\left(f_0 x\right) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ 2 + |x|, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$x^2 + 4f_0(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ x^2 + 4\left(1 + |x|\right) = \left(|x| + 2\right)^2 \end{cases}$$

이므로 $f = f_0$도 해가 된다. 임의의 자연수 m에 대하여

$$f_{-m}\left(f_{-m}(x)\right) = \begin{cases} 2+x, & x > -m \\ 2-x, & x \leq -m \end{cases}$$

$$x^2 + 4f_{-m}(x) = \begin{cases} (2+x)^2, & x > -m \\ (2-x)^2, & x \leq -m \end{cases}$$

따라서 풀이가 완료된다.

□

22. 행렬을 이용하여 $1 \leq k \leq n-1$, $A_k = \begin{bmatrix} 1+a_k & -a_k \\ a_k & -a_k \end{bmatrix}$일 때

$$\begin{bmatrix} u_{k+1} \\ u_{k+1} - u_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_k + a_k u_{k-1} \\ a_k u_{k-1} \end{bmatrix} = A_k \begin{bmatrix} u_k \\ u_k - u_{k-1} \end{bmatrix}$$

$$[v_{k+1}; v_k - v_{k+1}] = A_k\,[v_k; v_{k-1} - v_k]$$

따라서

$$u_n = [1; 0]\, A_{n-1} A_{n-2} \cdots A_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = v_n$$

□

23. S가 $n = 2000$개 서로 다른 실수의 집합이라 하자. $d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_m$을 중복을 고려하여 그 원소들 사이의 거리들이라 하자. $m = \dfrac{n(n-1)}{2}$. S의 원소들을 적당히 rescale하여 일반성을 잃지 않고 $d_1 = 1$이라고 가정할 수 있다. $d_1 = y - x$, x, $y \in S$라 하자. S의 최대원소 v와 최소원소 u에 대하여 $d_m = v - u$이다.

어떤 $i \in \{1, 2, \ldots, m-1\}$에 대하여 $\dfrac{d_{i+1}/d_i}{<} 1 + 10^{-5}$이라 가정하면, $0 \leq \dfrac{d_{i+1}}{d_i} - 1 < 10^{-5}$이므로 요구된 부등식이 성립한다. 그렇지 않고, 항상 $\dfrac{d_{i+1}}{d_i} \geq 1 + 10^{-5}$이라 가정하자. 그러면

$$v - u = d_m = \frac{d_m}{d_1} \geq \left(1 + \frac{1}{10^5}\right)^{m-1} = \left(1 + \frac{1}{10^5}\right)^{1998999} = \left(\left(1 + \frac{1}{10^5}\right)^{10^5}\right)^{19.98999} > 2^{19}$$

이제 $v - u = v - x + x - u$에서 $v - x > 2^{18}$ 또는 $x - u > 2^{18}$이다. $2^{18} = 32 \cdot 8192 > 32 \cdot 3125 = 10^5$임을 주목하라.

i. $v - x > 2^{18}$일 때. $a = c = v$, $d = x$, $b = y$로 택하면,
$$\left|\frac{a-b}{c-d} - 1\right| = \left|\frac{v-y}{v-x} - 1\right| = \left|\frac{1}{v-x}\right| < 2^{-18} < \frac{1}{100000}$$

ii. $x - u > 2^{18}$일 때. $a = c = u$, $d = x$, $b = y$로 택하면,
$$\left|\frac{a-b}{c-d} - 1\right| = \left|\frac{u-y}{u-x} - 1\right| = \left|\frac{1}{u-x}\right| < 2^{-18} < \frac{1}{10000}$$

□

24. $\mathbb{Q}_+ = \mathbb{Q}_{>0}$이라 하자. 함수 $f : \mathbb{Q}_{>0} \longrightarrow \mathbb{R}$이 임의의 $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$에 대하여 조건

$$M(x, y) : f(x)f(y) \geq f(xy),\ A(x, y) : f(x + y) \geq f(x) + f(y)$$

를 만족한다고 가정하자. $f(a) = a$도 어떤 $a > 1$에 대하여 만족한다고 하자. $M(1, a)$에서 $f(1) \geq 1$이다. 수학적 귀납법에서 $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{Q}_{>0}$에 대하여

$$f(nx) \geq nf(x)$$

특히 $f(n) \geq n$이다.

$m, n \in \mathbb{N}$에 대하여 $f(m/n)\, f(n) \geq f(m)$. 따라서 $\forall q \in \mathbb{Q}_+$에 대하여 $f(q) > 0$이다. 따라서 f는 강증가한다. 따라서 $x \geq 1$일 때는 언제나

$$f(x) \geq f(\lfloor x \rfloor) \geq \lfloor x \rfloor > x - 1$$

이 성립한다.

수학적 귀납법으로 임의의 $n \in \mathbb{N}$에 대하여 $f(x)^n \geq f(x^n)$이 성립한다. $f(x)^n \geq f(x^n) > x^n - 1$. 따라서 $f(x) \geq \sqrt[n]{x^n - 1}$. 따라서 $\forall x > 1, f(x) \geq x$를 얻는다.

$a^n = f(a)^n \geq f(a^n) \geq a^n$. 따라서 $f(a^n) = a^n$.

$x > 1$일 때 $a^n - x > 1$인 n을 정하자.

$$a^n = f(a^n) \geq f(x) + f(a^n - x) \geq x + a^n - x = a^n$$

따라서 $\forall x > 1, f(x) = x$.

$x \in \mathbb{Q}_+, n \geq 2, n \in \mathbb{N}$일때

$$nf(x) = f(n)f(x) \geq f(nx) \geq nf(x)$$

따라서 $f(nx) = nf(x)$이고 이는 $n = 1$일 때도 성립한다. 따라서 $f(m/n) = f(m)/n = \frac{m}{n}$. □

25. 먼저 $a_i \le n+i-1,\ i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$ 임을 보이자.

증명. 그렇지 않다고 하고, 그렇지 않은 최소의 i를 정하자.

$$a_n \ge a_{n-1} \ge \cdots \ge a_i \ge n+i$$

$a_{a_i} \le n+i-1$ 따라서 $a_i \not\equiv i, i+1, \ldots, n \pmod n$. 따라서 $a_i \ge 2n+1$. $a_1 + n \ge a_n \ge a_i$. 따라서 $a_1 \ge n+1$. i의 최소성에서 $i=1$이다. 곧, $a_1 \not\equiv 1, 2, \ldots, n \pmod n$이므로 모순이다. □

한 번 적어보면,

$$\begin{aligned} a_1 &\le n \\ a_2 &\ne n+1 \\ &\vdots \\ a_n &\le 2n-1 \end{aligned}$$

$a_n \le n$일 때는 보이고자 하는 부등식이 성립한다. 따라서 $a_n > n$인 경우를 생각하자. t를 다음과 같이 정하자.

$$1 \le t \le n-1$$
$$a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_t \le n < a_{t+1} \le \cdots \le a_n$$

$1 \le a_1 \le n$, $a_{a_1} \le n$이므로 $a_1 \le t$. 따라서 $a_n \le n+t$.

각각의 i에 대하여

$$b_i = |\{j \in \{t+1, \ldots, n\}\,|a_j \ge n+i\}|$$
$$b_1 \ge b_2 \ge \cdots \ge b_t \ge b_{t+1} = 0$$

이제 $i = 1, 2, \ldots, t$일 때 $a_i + b_i \le n$임을 보이고자 한다.

증명. $n+i-1 \ge a_{a_i}$, $a_i \le n$. $a_j \ge n+i \implies j \in \{a_i+1, \ldots, n\}$ 따라서 $b_i \le n - a_i$. □

이제 $a_{t+1} + \cdots + a_n \le n(n-t) + b_1 + \cdots + b_t$.

$$a_1 + \cdots + a_n \le n(n-t) + nt = n^2$$

□

풀이*2.* 좌표평면에 정수 m, n에 대하여 $\langle m, n\rangle$ 격자를

$$\{(x, y)|\,\lceil x\rceil = m,\ \lceil y\rceil = n\}$$

으로 정하자.

각각의 $i = 1, 2, \ldots, n$에 대하여

$$R = \bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{1\le j\le a_i} \langle i, j\rangle$$

을 생각하자. 이제 R을 $y = x$에 대하여 대칭이동한 다음에 x축 방향으로 $-n$만큼 옮긴 그래프를 S라 하자. R과 S가 겹치지 않음을 보이면 된다. 왜냐하면 T를 제 1사분면의 $n \times n$격자라 할 때 S에서 T 쪽에 튀어나온 부분이 바로 정확히 R에서 위로 삐져나간 부분이기 때문이다.

겹친다고 하고, i열에서 둘이 겹쳤다 하자. 이때, i열에서 제일 높은 겹치는 격자를 $\langle i, j\rangle$라 하자.

Case1 $a_i \le n$일 때. $j = a_i$이다 (i, a_i)격자는 S에서 제 a_i 행의 $n+i$번째 격자다. 그런데 $a_{a_i} < n+i$ 이므로 모순

Case2 $a_i \ge n+1$일 때 $j = n$이다. 이는 S에서 제 n행에 $(n+i)$번째 격자다. $a_n \le a_1 + n$이니 $i \le a_1$이다. 그런데 $a_1 \le a_{a_1} \le n$. 따라서 $a_i \le a_{a_1} \le n$이므로 모순.

□

26. $\mathbb{Z}_{\ge 0} = \mathbb{N}_0$로 나타내자. 함수 $f : \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{N}_0$가 임의의 $n \in \mathbb{N}_0$에 대하여 조건 $P(n) : f^3(n) = f(n+1)+1$을 만족한다고 가정하자. $f^4(n) = f\left(f^3(n)\right) = f(f(n+1)+1)$
$f^4(n+1) = f^3(f(n+1)) = f(f(n+1)+1)+1$ 따라서 $f^4(n)+1 = f^4(n+1)$이다. 이로써 f가 유계가 아님을 알 수 있고, 또, $1-1$임을 알 수 있다.

$R_i = \mathrm{Ran}(f^i)$라 하자. $R_0 = \mathbb{N}_0$이다. 또, R_i는 descending chain이다. 또한, R_4가 cofinite 임에 주목하자.

$S_i = R_{i-1} \setminus R_i$라 하자. $f : S_i \longrightarrow S_{i+1}$은 1-1대응이다. 따라서 $k = |S_1|$이라 하자.

조건에서 $0 \notin R_3$이다. 따라서 $0 \in S_1 \cup S_2 \cup S_3$이다. 따라서 $k \ge 1$이다.

$b \in \mathbb{R}_0 \setminus R_3$라 하자. 만약 $b \ge 1$이고 어떤 n에 대하여 $f(n) = b-1$이라 가정해 보자. 그러면 $f^3(n-1) = f(n)+1 = b$이므로 모순이다. 따라서

$$b = 0 \vee b = f(0)+1 \vee b-1 \in S_1$$

이다. 따라서

$$3k = |S_1 \cup S_2 \cup S_3| \le 1+1+|S_1| = k+2$$

따라서 $k \le 1$, 곧 $k = 1$이다. 또한, 위 부등식에서 등호가 성립하므로

$$S_1 = \{a\}\,,\, S_2 = \{f(a)\}\,,\, S_3 = \{f(f(a))\}$$

또, 위 경우는 정확히 한 번씩 성립하여

$$\left\{a, f(a), f^2(a)\right\} = \{0, a+1, f(0)+1\}$$

특히 $a+1 \in \left\{f(a), f^2(a)\right\}$. 만일 $a+1 = f^2(a)$이면 $f(a+1) = f^3(a) = f(a+1)+1$이므로

$$f(a) = a+1$$

따라서 $0 \in \left\{a, f^2(a)\right\}$이다.

Case 1 $a = 0$일 때. $f(0) = f(a) = a+1 = 1$. $f(1) = f^2(a) = f(0)+1 = 2$.

이제 $f(n) = n+1$은 수학적 귀납법으로 증명하자.

증명. $n \ge 2$라 하고 그 이전에는 다 성립했다 하자. $n+1 = f(n-1)+1 = f^3(n-2) = f^2(n-1) = f(n)$ □

대입하면 확인된다.

Case 2 $f^2(a)=0$ 일 때. $a=f(0)+1$. $f(a+1)=f^2(a)=0$ $f(0)=f^3(a)=f(a+1)+1=1$. $a=f(0)+1=2$. $f(2)=3$. 따라서 $f(0)=1$. $f(2)=3$, $f(3)=0$ 이 경우

$$f(n)=\begin{cases} n+1 & \text{if } n\equiv 0,2 \pmod 4 \\ n+5 & \text{if } n\equiv 1(\pmod 4) \\ n-3 & \text{if } n\equiv 3(\pmod 4) \end{cases}$$

이것이 성립하는 것은 역시 $n=4m+r$ 일 때 m 에 대한 귀납법으로 확인된다.

□

27. 실수 계수 다항식 $P(x)$ 가

$$\left(x^3-mx^2+1\right)P(x+1)+\left(x^3+mx^2+1\right)P(x-1)=2\left(x^3-mx+1\right)P(x)$$

를 만족한다고 하고, 양변에 x 를 곱해보자.

$x\left(x^3-mx^2+1\right)P(x{+}1){+}x\left(x^3+mx^2+1\right)P(x{-}1)=((x+1)-(x-1))\left(x^3-mx+1\right)P(x)$

$Q(x)=xP(x+1)-(x+1)P(x)$ 이라 하면

$$\left(x^3-mx^2+1\right)Q(x)=\left(x^3+mx^2-1\right)Q(x-1)$$

다항식 $X(x)$ 의 다중 해집합을 $R_{X(x)}$ 로 나타내자.

이제 $\deg P(x)\geq 2$ 라고 가정하자. 그러면 $\deg Q(x)=P(x)$ 이다. $A_a(x)=x^3+ax+1$ 이라 하자. $A(x)=A_{-m}(x)$, $B(x)=A_m(x)$ 라 하자.

$$R_{A(x)}=\{x_1,x_2,x_3\}, R_{B(x)}=\{y_1,y_2,y_3\}$$

라 하자.

$$\{x_1,x_2,x_3\}\cup R_Q=\{y_1,y_2,y_3\}\cup\left(R_Q+1\right)$$

그러면

$$\forall r\in R_Q,\left(r+1\in R_Q\vee\exists i.r+1=x_i\right)\wedge\left(r-1\in R_Q\vee\exists i.r=y_i\right)$$

따라서 공통해집합은 x_i, y_i 를 적당히 배열하면

$$R_i=\{y_i,y_i+1,\cdots,y_i+k_i=x_i\}, i=1,2,3$$

으로 분할된다. 특히 $x_i-y_i\in\mathbb{N}_0$ 이다.

미적분으로 $a\in\mathbb{Z}$ 일 경우 $a\leq -2$ 일 때 $A_a(x)$ 가 세 실근을 가지고, $a\geq -1$ 일 때 $A_a(x)$ 가 오직 한 실근을 가진다. $A(x)$ 와 $B(x)$ 의 실근의 개수가 같아야 하기때문에 $m=1\vee -1$ 임을 알 수 있다.

$A_1(x)=x^3+x^2+1$ 의 근은 $x=-0.6x$, $A_{-1}(x)$ 의 근은 $x=-1.3x$ 이므로 불가능함을 알 수 있다. 곧, $P(x)$ 는 선형이다.

주어진 조건은 선형으로 $P(x)=x$ 일 때 만족하고 $P(1)$ 에서는 만족하지 않기 때문에 $P(x)=tx$ 가 해임을 알 수 있다. □