2019학년도 중등학교교사 임용수보자 선정경쟁시험 모의고사 1

수　학

제1차 시험	2교시 전공A	14문항 40점	시험시간 90분

○ 문제지 전체 면수가 맞는지 확인하시오.
○ 모든 문항에는 배점이 표시되어 있습니다.

1. 다음은 2015 개정 교육과정에 따른 진로선택과목인 '기하' 과목에 대한 두 교사의 대화이다.

> 교사 A: '공간도형과 공간좌표'를 이루는 내용 요소가 '직선과 평면', '(㉠)', '공간좌표'가 있네요.
>
> 교사 B: 네. 공간도형의 방정식 중에서 평면의 방정식은 다루지 않게 되었어요. 이 문제도 수업시간에 다루려면 수정을 해야겠어요. (이 문제 : 평면 $z = 0$와 …(하략))
>
> 교사 A: 그 문제는 활용할 수 있어요. ㉡왜냐하면...

괄호 안의 ㉠에 들어갈 내용 요소와 ㉡에 해당하는 교수·학습 방법 및 유의 사항을 쓰시오. [2점]

2. 그래프 G의 인접행렬 M은 5×5이고 다음을 만족한다.

> 임의의 양의 정수 i, j에 대하여 $1 \le i < j \le 5$일 때 M의 (i, j)성분은 $j - i$를 2로 나눈 나머지이다.

이 그래프의 변의 개수를 구하시오. [2점]

3. 분모가 2019인 기약인 진분수의 합을 구하시오. (단, 기약인 진분수는 0보다 크고 1보다 작다.) [2점]

4. 함수

$$f(x) = \begin{cases} e & x \neq 0 \\ (1+x)^{\frac{1}{x}} & x \neq 0 \end{cases}$$

에 대하여, $f''(0)$를 구하시오. [2점]

5. 다음 적분의 값을 구하시오. [2점]

$$\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}\,x$$

6. 3차원 공간에서 곡면

$$xy^2z^3 = 6\sqrt{3}$$

위의 점 P와 원점 O에 대하여 OP가 최소가 되는 P의 개수를 구하고 이때 OP의 값을 구하시오. [2점]

7. 불규칙한 모양의 주사위를 제작하는 제작자는 주사위 모양이 불규칙함에도 홀수눈이 나올 확률과 짝수눈이 나올 확률이 동일하다고 주장한다. 그런데 실제로 이 주사위를 살펴보고 짝수눈이 더 잘 나오는 것 같다고 느낀 사용자는 제작자의 주장을 검증해 보기로 한다. 이 주장을 검증하기 위하여 주사위를 열 번 던지는 시행을 한다고 가정하자. 귀무가설 H_0를 '짝수눈이 나올 확률이 홀수눈이 나올 확률과 같다'로 하고 대립가설 H_1을 '작수눈이 나올 확률이 홀수눈이 나올 확률보다 크다'고 하자. 이 시행에 대한 표본 공간 S는 $(X_1, X_2, \ldots, X_{10})$으로 이루어져 있다. 여기서 X_j는 j번째 던졌을 때 나온 주사위 눈을 의미한다. 이제

$$C_n = \left\{(X_1, X_2, \ldots, X_{10})\,|X_j \text{ 가운데 짝수의 개수} \geq n\right\}$$

이때 유의수준 10%에서 기각역을 C_k라고 할 때 k의 값을 구하시오. [2점]

8. 3차원 유클리드 공간 $\mathbb{R}^3$ 의 곡선 $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ 에 대하여

$$\gamma''(t) = -\frac{1}{|\gamma(t)|^3}\gamma(t)$$

가 성립한다. $\gamma(0) = \left(1, 1, \frac{1}{2}\right)$, $\gamma'(0) = (1, 0, 0)$ 일 때 이 곡선의 지름을 구하여라. 단, 곡선의 지름은 곡선상의 임의의 두 점사이의 거리의 최소상계이다. [2점]

9. 다음은 2007 개정 교육과정에서 사용된 극값의 정의이다.

> 함수 f 가 $x = a$ 에서 미분 가능하고 $f'(a) > 0$ 일 때 $f(x)$ 가 $x = a$ 에서 증가상태에 있다고 한다. 또 $f'(a) < 0$ 일 때 $f(x)$ 가 $x = a$ 에서 감소상태에 있다고 한다.
>
> 함수 f 가 구간 (p, q) 에서 미분가능하고 $a \in (p, q)$ 에 대하여 $x = a$ 에서 $f(x)$ 가 감소상태에서 증가상태로 바뀔 때 $f(x)$ 는 $x = a$ 에서 극솟값을 가진다고 한다. 또 증가상태에서 감소상태로 바뀔 때 $f(x)$ 는 $x = a$ 에서 극댓값을 가진다고 한다. $x = a$ 에서 극대 혹은 극소일 때 $f(x)$ 가 $x = a$ 에서 극값을 가진다고 한다.

이 정의에 따를 때 다음 정리에서 f 가 (p, q) 에서 미분가능하며 어떤 공집합이 아닌 열린 구간에서도 상수함수가 아니라는 조건을 추가한다고 하더라도 옳다고 할 수 없음을 서술하고 라카토스의 수학적 지식의 성장 과정에 따라 위의 정의를 개선하여 다음 정리가 옳게끔 하는 과정을 서술하시오. [4점]

> 정리
>
> 닫힌 구간 $[p, q]$ 에서 연속인 함수 f 의 최댓값은 양 끝값 또는 극값에서 가진다.

10. 어느 영재학교에서 다음과 같은 시험문제가 출제되었다.

> 공간상에 서로 다른 직선 l, m, n에 대하여 l과 m이 평행하고 m과 n이 평행하면 l과 n이 평행함을 보여라.

시험이 끝나고 있었던 두 학생의 대화이다.

> 민준 : 도데체 뭘 보이라는건지. 당연한걸 가지고.
>
> 서연 : 그래서 어떻게 했어?
>
> 민준 : 그냥 l, m이 있는 평면 하나 그리고 m, n이 있는 평면 하나 그리고나니까 l, n이 있는 평면도 보이더라고. 그래서 그것도 추가로 그린다음에 '그림에서 보는것과 같이 l, n은 한 평면상에 있고 만나지 않으므로 평행하다' 라고 쓰고 냈어. 그런데 너는 어떻게 했어?
>
> 서연 : 나는 이렇게 했어. '공간상에 서로 다른 직선 l, m, n에 대하여 l과 m이 평행하고 m과 n이 평행하다고 하자. l과 m을 품는 평면을 α라 하고 m과 n을 품는 평면을 β라 하자. 만일 l과 n이 만난다면 이 점을 P라 할 때, α와 β는 P와 m 모두 포함하므로 $\alpha = \beta$인데, 그러면 세 직선이 한 평면상에 있으므로 l, n이 P를 지나며 m에 평행한 두 직선이 되어 모순이다. 따라서 l과 n은 만나지 않는다. 이제 이 두 직선을 포함하는 평면이 존재함을 보이면 된다.
> l 위의 한 점 P를 잡고 n과 P를 포함하는 평면을 γ라 하자. 만일 $\alpha = \gamma$이면 l과 n은 한 평면에 있다. 이제 $\alpha \neq \gamma$인 경우를 고려하자. P는 α와 γ가 공유하므로, α와 γ의 교선이 존재하며 P를 포함한다. 이를 l'이라 하자. 이제 $l' = l$임을 보이면 된다. $l' \neq l$이라 하자. l과 m은 평행하고 l은 P를 지나고 l'도 P를 지나며 l'과 m은 한 평면상에 있으므로 l'과 m은 만나야 한다. 이 점을 Q라 하자. 그러면 Q는 m 위의 점이며 l' 위의 점이므로 γ 위의 점이기도 하다. 따라서 γ는 m 위의 점 Q를 포함하고 n을 포함하는데 이는 β와 같은 성질이므로 평면 결정 조건에 의하여 $\gamma = \beta$이다. 결국 P는 β 위의 점이며 m도 β 위에 있으니 이는 α의 성질과 같고 평면 결정 조건에 의하여 $\alpha = \beta$, 곧 $\alpha = \gamma$라서 가정에 모순이다. 곧, $l' = l$임을 알 수 있고 이로써 증명이 완료된다.'

이 대화를 바탕으로 공간도형에 대한 두 학생의 공간기하학에 대한 기하 학습 수준의 특징에 대해 반 힐레 수학 학습수준 이론에 근거하여 설명하고, 해당 학습 수준의 근거를 서술하시오. [4점]

11. 복소 정함수 $f(z)$가 다음 성질을 만족한다.

> (가) 실수 x, y에 대하여 $|x+yi| \le 1$이면 $|f(x+yi)| \le e^{x^2-y^2}$이 성립한다.
>
> (나) $\left|f\left(\frac{1}{2}\right)\right| = e^{\frac{1}{4}}$.
>
> (다) $\lim_{z\to 0} \frac{1}{z} f'(z) = 2$

$\left|f\left(-\frac{1}{2}\right)\right|$의 값을 구하여라. 또, $f'(c) = e-1$을 만족하는 $c \in (0,1)$가 존재함을 증명하여라. [4점]

12. 두 연속확률변수 X, Y 는 서로 독립이고 각각 구간 $(0, 2)$ 에서 균등분포를 따른다. 확률변수 $Z = \frac{X}{Y}$ 의 확률밀도 함수 $f_Z(z)$ 와 평균 $\mathrm{E}(Z)$ 를 풀이 과정과 함께 쓰시오. [4점]

13. 체 $F = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ 에 대하여 F-벡터 공간 V 는 F 에서 F 로의 함수 공간이다. V 에서 함수 $f_0(x) = 1$, $f_j(x) = x^j$, $j = 1, 2$ 에 대하여 집합 $\{f_0, f_1, f_2\}$ 가 기저임을 보여라. 또, $D[1] = 0$, $D[x] = 1$, $D[x^2] = 2x$ 를 만족하는 선형변환

$$D : f \mapsto D(f)$$

가 라이프니츠 법칙 $D[f(x)g(x)] = (D[f(x)])g(x) + f(x)D(g(x))$ 를 만족하는지 확인하고, 임의의 기저에 대하여 변환 $I \times D : f \mapsto I \times Df$, $I \times Df : x \mapsto x(f(x))$ 의 표현 행렬에 대한 대각합을 $\{0, 1, 2\}$ 의 원소 s 에 대하여 $s + 3\mathbb{Z}$ 라 할 때 s 의 값을 구하여라. [4점]

14. 유한 모노이드 $(M, \cdot)$ 을 생각하자. 곧, M 은 이항연산 $\cdot$ 에 대하여 닫혀있고, 이 연산의 결합법칙이 성립하며, 항등원이 존재한다. $A \subset M$ 가 다음을 만족하면 M 의 핵심이라 정의하자.

임의의 $x \in M$ 에 대하여 어떤 양의 정수 k 가 존재하여 $x^k \in A$ 이다.

s 는 핵심 집합의 원소의 개수의 최솟값이다. 이때 $(M, \cdot)$ 이 군일 필요충분조건은 $s = 1$ 임을 보이시오. 또, 원소의 개수가 s 인 핵심 집합은 오직 하나만 존재함을 증명하고, s 가 1000 이상인 M 의 예를 하나 들어보시오. [4점]