2019학년도 중등학교교사 임용수보자 선정경쟁시험 모의고사 Final A
수학

김동희

2018년 11월 18일

1. 다음은 2015 개정 교육과정에 따른 진로선택과목인 '기하' 과목에 대한 두 교사의 대화이다.

> 교사 A: '공간도형과 공간좌표'를 이루는 내용 요소가 '직선과 평면', '(㉠)', '공간좌표'가 있네요.
>
> 교사 B: 네. 공간도형의 방정식 중에서 평면의 방정식은 다루지 않게 되었어요. 이 문제도 수업시간에 다루려면 수정을 해야겠어요. (이 문제 : 평면 $z = 0$와 ...(하략))
>
> 교사 A: 그 문제는 활용할 수 있어요. ㉡<u>왜냐하면...</u>

괄호 안의 ㉠에 들어갈 내용 요소와 ㉡에 해당하는 교수 · 학습 방법 및 유의 사항을 쓰시오. [2점]

2. 그래프 G의 인접행렬 M은 5×5이고 다음을 만족한다.

> 임의의 양의 정수 i, j에 대하여 $1 \le i < j \le 5$일 때 M의 (i, j)성분은 $j - i$를 2로 나눈 나머지이다.

이 그래프의 변의 개수를 구하시오. [2점]

3. 분모가 2019인 기약인 진분수의 합을 구하시오. (단, 기약인 진분수는 0보다 크고 1보다 작다.) [2점]

4. 함수

$$f(x) = \begin{cases} e & x \neq 0 \\ (1+x)^{\frac{1}{x}} & x \neq 0 \end{cases}$$

에 대하여, $f''(0)$를 구하시오. [2점]

5. 다음 적분의 값을 구하시오. [2점]

$$\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x}\, \mathrm{d}\, x$$

6. 3차원 공간에서 곡면

$$xy^2 z^3 = 6\sqrt{3}$$

위의 점 P 와 원점 O 에 대하여 OP 가 최소가 되는 P 의 개수를 구하고 이때 OP 의 값을 구하시오. [2점]

7. 불규칙한 모양의 주사위를 제작하는 제작자는 주사위 모양이 불규칙함에도 홀수눈이 나올 확률과 짝수눈이 나올 확률이 동일하다고 주장한다. 그런데 실제로 이 주사위를 살펴보고 짝수눈이 더 잘 나오는 것 같다고 느낀 사용자는 제작자의 주장을 검증해 보기로 한다. 이 주장을 검증하기 위하여 주사위를 열 번 던지는 시행을 한다고 가정하자. 귀무가설 H_0 를 '짝수눈이 나올 확률이 홀수눈이 나올 확률과 같다' 로 하고 대립가설 H_1 을 '작수눈이 나올 확률이 홀수눈이 나올 확률보다 크다' 고 하자. 이 시행에 대한 표본 공간 S 는 $(X_1, X_2, \ldots, X_{10})$ 으로 이루어져 있다. 여기서 X_j 는 j 번째 던졌을 때 나온 주사위 눈을 의미한다. 이제

$$C_n = \left\{(X_1, X_2, \ldots, X_{10})\,|\,X_j \text{ 가운데 짝수의 개수} \geq n\right\}$$

이때 유의수준 10% 에서 기각역을 C_k 라고 할 때 k 의 값을 구하시오. [2점]

8. 3차원 유클리드 공간 $\mathbb{R}^3$ 의 곡선 $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ 에 대하여

$$\gamma''(t) = -\frac{1}{|\gamma(t)|^3}\gamma(t)$$

가 성립한다. $\gamma(0) = \left(1, 1, \frac{1}{2}\right)$, $\gamma'(0) = (1, 0, 0)$ 일 때 이 곡선의 지름을 구하여라. 단, 곡선의 지름은 곡선상의 임의의 두 점사이의 거리의 최소상계이다. [2점]

9. 다음은 2007 개정 교육과정에서 사용된 극값의 정의이다.

> 함수 f 가 $x = a$ 에서 미분 가능하고 $f'(a) > 0$ 일 때 $f(x)$ 가 $x = a$ 에서 증가상태에 있다고 한다. 또 $f'(a) < 0$ 일 때 $f(x)$ 가 $x = a$ 에서 감소상태에 있다고 한다.
>
> 함수 f 가 구간 (p, q) 에서 미분가능하고 $a \in (p, q)$ 에 대하여 $x = a$ 에서 $f(x)$ 가 감소상태에서 증가상태로 바뀔 때 $f(x)$ 는 $x = a$ 에서 극솟값을 가진다고 한다. 또 증가상태에서 감소상태로 바뀔 때 $f(x)$ 는 $x = a$ 에서 극댓값을 가진다고 한다. $x = a$ 에서 극대 혹은 극소일 때 $f(x)$ 가 $x = a$ 에서 극값을 가진다고 한다.

이 정의에 따를 때 다음 정리에서 f 가 (p, q) 에서 미분가능하며 어떤 공집합이 아닌 열린 구간에서도 상수함수가 아니라는 조건을 추가한다고 하더라도 옳다고 할 수 없음을 서술하고 라카토스의 수학적 지식의 성장 과정에 따라 위의 정의를 개선하여 다음 정리가 옳게끔 하는 과정을 서술하시오. [4점]

정리

닫힌 구간 $[p, q]$ 에서 연속인 함수 f 의 최댓값은 양 끝값 또는 극값에서 가진다.

10. 어느 영재학교에서 다음과 같은 시험문제가 출제되었다.

공간상에 서로 다른 직선 l, m, n 에 대하여 l 과 m 이 평행하고 m 과 n 이 평행하면 l 과 n 이 평행함을 보여라.

시험이 끝나고 있었던 두 학생의 대화이다.

민준: 도데체 뭘 보이라는건지. 당연한걸 가지고.

서연: 그래서 어떻게 했어?

민준: 그냥 l, m 이 있는 평면 하나 그리고 m, n 이 있는 평면 하나 그리고나니까 l, n 이 있는 평면도 보이더라고. 그래서 그것도 추가로 그린다음에 '그림에서 보는것과 같이 l, n 은 한 평면상에 있고 만나지 않으므로 평행하다' 라고 쓰고 냈어. 그런데 너는 어떻게 했어?

서연: 나는 이렇게 했어. '공간상에 서로 다른 직선 l, m, n 에 대하여 l 과 m 이 평행하고 m 과 n 이 평행하다고 하자. l 과 m 을 품는 평면을 α 라 하고 m 과 n 을 품는 평면을 β 라 하자. 만일 l 과 n 이 만난다면 이 점을 P 라 할 때, α 와 β 는 P 와 m 모두 포함하므로 $\alpha = \beta$ 인데, 그러면 세 직선이 한 평면상에 있으므로 l, n 이 P 를 지나며 m 에 평행한 두 직선이 되어 모순이다. 따라서 l 과 n 은 만나지 않는다. 이제 이 두 직선을 포함하는 평면이 존재함을 보이면 된다.

l 위의 한 점 P 를 잡고 n 과 P 를 포함하는 평면을 γ 라 하자. 만일 $\alpha = \gamma$ 이면 l 과 n 은 한 평면에 있다. 이제 $\alpha \neq \gamma$ 인 경우를 고려하자. P 는 α 와 γ 가 공유하므로, α 와 γ 의 교선이 존재하며 P 를 포함한다. 이를 l' 이라 하자. 이제 $l' = l$ 임을 보이면 된다. $l' \neq l$ 이라 하자. l 과 m 은 평행하고 l 은 P 를 지나고 l' 도 P 를 지나며 l' 과 m 은 한 평면상에 있으므로 l' 과 m 은 만나야 한다. 이 점을 Q 라 하자. 그러면 Q 는 m 위의 점이며 l' 위의 점이므로 γ 위의 점이기도 하다. 따라서 γ 는 m 위의 점 Q 를 포함하고 n 을 포함하는데 이는 β 와 같은 성질이므로 평면 결정 조건에 의하여 $\gamma = \beta$ 이다. 결국 P 는 β 위의 점이며 m 도 β 위에 있으니 이는 α 의 성질과 같고 평면 결정 조건에 의하여 $\alpha = \beta$, 곧 $\alpha = \gamma$ 라서 가정에 모순이다. 곧, $l' = l$ 임을 알 수 있고 이로써 증명이 완료된다.'

이 대화를 바탕으로 공간도형에 대한 두 학생의 공간기하학에 대한 기하 학습 수준의 특징에 대해 반 힐레 수학학습수준 이론에 근거하여 설명하고, 해당 학습 수준의 근거를 서술하시오. [4점]

11. 복소 정함수 $f(z)$ 가 다음 성질을 만족한다.

(가) 실수 x, y 에 대하여 $|x + yi| \leq 1$ 이면 $|f(x + yi)| \leq e^{x^2 - y^2}$ 이 성립한다.

(나) $\left|f\left(\frac{1}{2}\right)\right| = e^{\frac{1}{4}}$.

(다) $\lim_{z\to 0}\frac{1}{z}f'(z)=2$

$\left|f\left(-\frac{1}{2}\right)\right|$의 값을 구하여라. 또, $f'(c)=e-1$을 만족하는 $c\in(0,1)$가 존재함을 증명하여라. [4점]

12. 두 연속확률변수 X, Y는 서로 독립이고 각각 구간 $(0,2)$에서 균등분포를 따른다. 확률변수 $Z=\frac{X}{Y}$의 확률밀도함수 $f_Z(z)$와 평균 $\mathrm{E}(Z)$를 풀이 과정과 함께 쓰시오. [4점]

13. 체 $F=\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$에 대하여 F-벡터 공간 V는 F에서 F로의 함수 공간이다. V에서 함수 $f_0(x)=1$, $f_j(x)=x^j$, $j=1,2$에 대하여 집합 $\{f_0,f_1,f_2\}$가 기저임을 보여라. 또, $D[1]=0$, $D[x]=1$, $D[x^2]=2x$를 만족하는 선형변환

$$D:f\mapsto D(f)$$

가 라이프니츠 법칙 $D[f(x)g(x)]=(D[f(x)])g(x)+f(x)D(g(x))$를 만족하는지 확인하고, 임의의 기저에 대하여 변환 $I\times D:f\mapsto I\times Df$, $I\times Df:x\mapsto x(f(x))$의 표현 행렬에 대한 대각합을 $\{0,1,2\}$의 원소 s에 대하여 $s+3\mathbb{Z}$라 할 때 s의 값을 구하여라. [4점]

14. 유한 모노이드 $(M,\cdot)$을 생각하자. 곧, M은 이항연산 $\cdot$에 대하여 닫혀있고, 이 연산의 결합법칙이 성립하며, 항등원이 존재한다. $A\subset M$가 다음을 만족하면 M의 핵심이라 정의하자.

임의의 $x\in M$에 대하여 어떤 양의 정수 k가 존재하여 $x^k\in A$이다.

s는 핵심 집합의 원소의 개수의 최솟값이다. 이때 $(M,\cdot)$이 군일 필요충분조건은 $s=1$임을 보이시오. 또, 원소의 개수가 s인 핵심 집합은 오직 하나만 존재함을 증명하고, s가 1000이상인 M의 예를 하나 들어보시오. [4점]

Notes

1. ㉠ 정사영. ㉡ xy평면, yz평면, zx평면이 각각 $z=0$, $x=0$, $y=0$으로 표현될 수 있음을 직관적으로 이해하게 한다. □

2. 행렬 M은 대칭이므로 조건을 만족하는 행렬은 열수와 행수의 차가 홀수인 경우에만 성분이 1인 행렬이다. 따라서 각 열의 성분의 합은 제 1열부터 각각 $2,3,2,3,2$. 따라서 모든 성분의 합은 12이다. 즉, 대응하는 그래프의 변의 개수는 $\boxed{6}$이다. □

3. 분모가 2019인 기약인 진분수는 모두 $\varphi(2019) = 1344$개 있다. 또한, $(k, 2019) = 1 \leftrightarrow (2019-k, 2019) = 1$이므로, $R = \{k|(k, 2019) = 1, k = 1, 2, \ldots, 2019\}$라 하면

$$\sum_{k\in R} \frac{k}{2019} = \sum_{k\in R} \frac{2019-k}{2019}$$

이므로 그 합을 S라 하면, $2S = 1344$, 곧 $S = \boxed{1344}$이다 □

4. $f(x)$는 $x = 0$근방에서 연속이다. 또, $x \neq 0$일 때

$$f(x) = e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)} = e^{1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+x^3 h(x)}$$

여기서 $h(x)$는 해석적함수다. 따라서

$$f(x) = e \cdot e^{-\frac{x}{2}} \cdot e^{\frac{x^2}{3}} \cdot e^{x^3 h(x)}$$

따라서 $f(x)$는 $x = 0$근방에서 해석적이며, 그 메클로린 급수는 제 2항까지

$$f(x) = e\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{11}{24}x^2 + \cdots\right)$$

이다. 따라서 $f''(0) = \boxed{\frac{11e}{12}}$이다. □

5. $I = \int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}\,x$라 하자. $\pi - x = u$라 하면,

$$I = \int_0^\pi \frac{(\pi-u)\sin u}{1+\cos^2 u}\,\mathrm{d}\,u = \pi\int_0^\pi \frac{\sin u}{1+\cos^2 u}\,\mathrm{d}\,u - I$$

따라서

$$I = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi \frac{\sin u}{1+\cos^2 u}\,\mathrm{d}\,u = \boxed{\frac{\pi^2}{4}}$$

□

6. $P(x, y, z)$에 대하여

$$OP^2 = x^2 + y^2 + z^2 = x^2 + \frac{6\sqrt{3}}{xz^3} + z^2$$

x, z가 정해지면 y값도 정해지므로, 이를 x, z에 대한 함수로 간주할 수 있다. 따라서 $f(x, z) = OP^2$이라 하고 $f(x, z)$의 최솟값을 구해보자. 정의역은 $xz > 0$을 만족한다.

충분히 큰 M에 대하여 $xz^3 < \frac{1}{M}$ 또는 $x^2 + z^2 > M$인 영역은 배제할 수 있고 나머지 영역은 콤팩트이므로 최솟값이 존재한다. 최솟값의 후보는 경계부분이나 극값에 존재한다.

$\nabla f = 0$을 풀면 $x = \pm 1$, $z = \pm\sqrt{3}$. 대입하면 $f = 6$으로 경계부분에서의 값보다 현저히 작으므로 이것이 최솟값이며, P의 개수는 2개임을 알 수 있다. 따라서 OP의 최솟값은 $\sqrt{6}$이다. □

별해. 산술 평균 기하 부등식으로

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq 6\left(\frac{x^2y^4z^6}{2^2 3^3}\right)^{\frac{1}{6}} = 6$$

과 같이 할 수 있다. □

7. 지금 고려하는 예에서는 '짝수눈이 나올 확률이 절반보다 크다'는데 관심이 있으므로 기각역은 주사위를 던져서 나온 눈의 수를 $X_1, X_2, \ldots, X_{10}$이라 하면

$$C_n = \{(X_1, X_2, \ldots, X_{10})\,|X_j \text{ 가운데 짝수의 개수} \geq n\}$$

꼴이 바람직하다. 이제 유의수준을 10%로 설정해 보자. 귀무가설이 참이라는 가정하에서 주사위를 10번 던져 짝수눈이 n번 나올 확률은 이항 분포에 의하여 $\binom{10}{n}\frac{1}{2^{10}}$이다. 따라서 $P\left(\vec{X} \in C_n\right) = \sum_{k=n}^{10}\binom{10}{k}\frac{1}{1024}$이다. $P\left(\vec{X} \in C_7\right) = \frac{11}{64} \approx 17\%$, $P\left(\vec{X} \in C_8\right) = \frac{7}{128} \approx 5.5\%$이므로 유의수준 10%에서는 C_8을 기각역으로 채택하는 것이 바람직하다. □

8. γt 의 위치벡터를 $\mathbf{r}$ 이라 하고, 속도 벡터를 $\mathbf{v}$, 가속도 벡터를 $\mathbf{a}$ 라 하자. 그러면

$$\mathbf{a} = -\frac{1}{r^2}\mathbf{r}$$

따라서 $\mathbf{r} \times \mathbf{a} = 0$ 이다.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}(\mathbf{r} \times \mathbf{v}) ==$$

따라서 $\mathbf{r} \times \mathbf{v} = \mathbf{h}$ 는 상수벡터다.

$\mathbf{r}$ 방향 단위벡터 $\mathbf{u}$ 에 대하여

$$\mathbf{h} = r\mathbf{u} \times (r\mathbf{u})' = r^2\left(\mathbf{u} \times \mathbf{u}'\right)$$

따라서

$$\mathbf{a} \times \mathbf{h} = -\mathbf{u} \times \left(\mathbf{u} \times \mathbf{u}'\right) = \mathbf{u}'$$

여기서 BAC-CAB 공식을 사용하였다.

이제 $(\mathbf{v} \times \mathbf{h})' = \mathbf{u}'$ 에서

$$\mathbf{v} \times \mathbf{h} = \mathbf{u} + \mathbf{c}$$

를 만족하는 상수벡터 $\mathbf{c}$ 가 존재함을 알 수 있다. 이제 $\mathbf{h}$ 가 가리키는 방향을 z 축으로 하면 $\mathbf{r}$, $\mathbf{v}$ 는 모두 xy 평면상의 벡터이고 $\mathbf{c}$ 또한 xy 평면상의 벡터다. $\mathbf{c}$ 가 가리키는 방향을 x 축으로 하자. 그러면

$$\mathbf{r} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{h}) = r + rc\cos\theta$$

한편

$$\mathbf{r} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{h}) = \mathbf{h} \cdot \mathbf{r} \times \mathbf{v} = h^2$$

따라서 극좌표 방정식

$$r = \frac{h^2}{1 + c\cos\theta}$$

를 얻는다. 초기 조건에서 $\mathbf{h} = \left\langle 0, \frac{1}{2}, -1\right\rangle$, $\mathbf{c} = \left\langle -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}\right\rangle$ 이므로

$$r = \frac{\frac{5}{4}}{1 + \frac{\sqrt{21}}{6}\cos\theta}$$

이는 장반경이 6 인 타원으로 문제의 정의에 따라 곡선의 지름은 $\boxed{6}$ 이다. □

9. 먼저 다음과 같은 추측을 제기해 보자.

> 함수 $f(x)$ 가 닫힌 구간 $[p, q]$ 에서 연속이고 (p, q) 에서 미분가능하며, 임의의 열린구간에서 상수함수가 아니라면 그 최댓값은 양 끝값 또는 극값에서 가진다.

이것은 다음과 같은 부분추측의 결과로 생각할 수 있다.

1. 연속함수의 최댓값이 양 끝값에서 나타나지 않았다면, 반드시 구간 (p, q) 상에서 가질 것이다.
2. $x = c$ 에서 최댓값을 가졌다고 한다면, $f'(c) = 0$ 임을 미분의 정의에서 알 수 있다.
3. c 근방에서 $x < c$ 일 때는 $x = c$ 일 때 값이 더 크므로 증가하여야 하고 $x > c$ 일 때는 $x = c$ 일 때 값이 더 크므로 감소하여야 한다.

그런데 이와같은 추측은 다음과 같은 반례를 통해 성립하지 않는다는 것을 알 수 있다.

> 함수 $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ 을
>
> $$f(x) = \begin{cases} x^2\left(-2 + \sin\frac{1}{x}\right), & x \neq \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$
>
> 로 정의하면 $[-1, 1]$ 에서 연속이고 $x = 0$ 에서 최댓값 0 을 가진다. 또 $f(x)$ 는 전 실수구간에서 미분가능이므로 $(-1, 1)$ 에서 미분가능이다. 그런데 양 끝값은 음수이고, $x = 0$ 부근에서 $f'(x)$ 의 부호는 무수히 바뀌기 때문에 $x = 0$ 은 극대가 아니다. 임의의 다른 곳에서 함숫값이 음수이므로 정리가 성립하지 않는다.

이것은 부분추측의 세번째에서 오류가 있었음을 시사한다. 그러나 이 예에서도 $f'(0) = 0$은 성립한다는 것을 알 수 있다. 문제의 정리를 적용할 정도로 일반적인 상황이라면 함수의 미분가능성도 유지할 수가 없다. 이를 통해 극값의 정의를 다음과 같이 할 수 있음을 알 수 있다.

함수 $f(x)$가 $x = c$에서 미분가능하지 않거나 또는 $f'(c) = 0$일 때 $x = c$에서 극값을 가진다고 한다.

□

별해. 다음과 같이 극대, 극소의 정의를 바꾸는 것도 가능하다.

함수 $f(x)$가 $x = c$의 근방에서 $f(c)$가 최댓값일 때 $x = c$에서 극댓값을 가진다고 한다. 마찬가지로 $x = c$의 근방에서 $f(c)$가 최솟값일 때 $x = c$에서 극솟값을 가진다고 한다. $x = c$에서 극댓값 혹은 극솟값을 가질 대 $x = c$에서 극값을 가진다고 한다.

□

10. 민준이의 기하 학습 수준은 제 2수준에 도달하였다고 할 수 있다. 제 2수준은 기술적 분석적 인식 수준으로서 학생들은 도형의 성질에 주목하며 도형의 성질을 분석할 수 있다. 학생들은 시각적으로 지각되는 모양을 분석함으로써 도형의 성질을 알게 되고 결과적으로 도형의 성질에 의해 인식하고 특정 짓는다.

서연이의 기하 학습 수준은 제 4수준에 도달하였다고 할 수 있다. 제 4수준은 형식적 연역 수준으로서, 연역의 의의가 전반적으로 이해된다. 학생들은 기하학의 이론 전체를 구성하며 전개시키는 공리적 방법의 의의를 이해하게 된다. 학생들은 공리적 체계 내에서 정리를 확립할 수 있으며, 무정의 용어, 공리, 정의, 정리 사이의 논리적인 차이점을 인식한다. □

11. $|z| \leq 1$일 때 $|f(z)| \leq |\exp(z^2)|$. $g(z) = f(z)\exp(-z^2)$라 하면 g는 정함수고 $g : \overline{D} \to \overline{D}$. 또한 $|g(1/2)| = |f(1/2)|\exp(-1/4) = 1$이므로 최댓값 원리에서 g는 상수다. 곧, $f(z) = k\exp(z^2), f'(z) = 2kz\exp(z^2), k = 1$ 따라서 $f = \exp(z^2)$. 따라서 $\left|f\left(-\frac{1}{2}\right)\right| = e^{1/4}$. 또한 실수축에서 f는 실가함수고 $f(0) = 1, f(1) = e$이므로 롤의 정리에 의하여 $f'(c) = e - 1$을 만족하는 $c \in (0, 1)$가 존재한다. □

12. 양수 a에 대하여 영역 $\left\{(x, y) | \frac{y}{x} \leq a\right\}$과 $[0, 2] \times [0, 2]$의 교집합의 측도를 $M(a)$라 하자. 그러면

$$M(a) = \int_0^a f_Z(z)\,\mathrm{d}\,z$$

이 성립한다. 한 편,

$$M(a) = \begin{cases} 2a & a \leq 1 \\ 4 - \frac{2}{a} & a \geq 1 \end{cases}$$

이므로 미적분학의 기본정리에 의하여

$$f_Z(z) = \begin{cases} 2 & z \leq 1 \\ \frac{2}{z^2} & z \geq 1 \end{cases}$$

따라서

$$\mathrm{E}(Z) = \int_0^2 2z\,\mathrm{d}\,z + \int_2^\infty \frac{2}{z}\,\mathrm{d}\,z = \boxed{\infty}$$

(혹은, 기댓값이 존재하지 않는다. 혹은 기댓값이 발산한다로 말할 수 있다.) □

13. V는 F상의 삼차원 벡터공간으로 $B = \{f_0, f_1, f_2\}$가 선형독립임을 보이면 된다. 이는 evaluation homomorphism $\nu : F[x] \longrightarrow V$의 핵의 원소 $n(x)$에 대하여 $n(x) = 0$이거나 $n(x)$의 차수가 3차 이상이므로 증명된다.

이제 $x^2 = x^4$이므로 $D[x^2x^2] = 2D[x^2]x^2 = 4x^3 = x$. 그런데 $D[x^2x^2] = D[x^2] = 2x$이므로 라이프니츠 법칙은 성립하지 않음을 알 수 있다.

선형변환의 표현행렬의 대각합은 기저에 의존하지 않으므로 $L = I \times Df$라 할 때, $L(1) = 0$, $L(x) = x$, $L(x^2) = 2x^2$에서 대각합은 $0 + 1 + 2 = 0$이다. 곧, $s = 0$이다. □

14. 먼저 M이 군이라 가정하자. 항등원을 e라 할 때 $\{e\}$가 핵심이다.

이제 $s = 1$이라 가정하고 $\{a\}$가 핵심이라 하자. 어떤 자연수 k에 대하여 $e^k = a$이므로 $a = e$이고 따라서 임의의 원소는 멱영이다. 따라서 M은 군이다.

이제 원소 개수 s인 핵심 집합이 K, T라 하자. 그러면 $K \cap T$ 또한 핵심이므로 $|K \cap T| \geq s$이다. 따라서 $K = |K \cap T| = T$이므로 $K = T$이다.

이제 원소의 개수가 n개인 유한 집합 S에 대하여 M은 S의 멱집합이라 하자. M 위에 연산을 $\cup$으로 정하면 M은 항등원 $\emptyset$을 가지는 모노이드다. 그런데 임의의 $A \in M$에 대하여 $A^n = A \cup A \cup \cdots \cup A = A$이므로 M 자체가 유일한 핵심이다. 따라서 $n \geq 10$으로 한다면 $s > 1000$인 예가 된다. $\square$