2019학년도 중등 교사 임용 경쟁 시험 해설

김동희

2018년 11월 27일

1 2019 A

기출 1. 2019학년도 A2

$\mathbb{Z}_7[x]$는 유한체(finite field) $\mathbb{Z}_7$ 위의 다항식환(polynomial ring)이다. $\mathbb{Z}_7[x]$의 주 아이디얼(단항이데알, principal ideal) $I = \langle x^2 - x \rangle$에 대하여 잉여환(상환, factor ring, quotient ring) $\mathbb{Z}_7[x]/I$의 단원(unit, unit element)의 개수를 구하시오. [2점]

기출 1. $\mathbb{Z}_7[x]/I = \{ax + b + I | a, b \in \mathbb{Z}_7\}$. 여기서 임의의 $\overline{ax+b} = ax + b + I$에 대하여 차수가 1 이하인 표현자는 유일하다. 따라서 적당한 $p, q \in \mathbb{Z}_7$에 대하여

$$(ax + b)(px + q) \equiv 1 \pmod{x^2 - x}$$

를 만족하는 $a, b \in \mathbb{Z}_7$의 개수를 구하면 된다. 그런데 $x^2 \equiv x$이므로 위 방정식은

$$\begin{cases} ap + aq + bp = 0 \\ bq = 1 \end{cases}$$

따라서 $b \neq 0$이고 이때 $q = b^{-1}$이므로 대입하면

$$(a + b)p = -\frac{a}{b}$$

만일 $a = -b$이면 해 없고, $a \neq -b$이면 해가 존재한다. 따라서 단원의 개수는 $6^2 = 36$이다. □

별해. $\mathbb{Z}_7[x]/\langle x(x-1) \rangle$상의 단원이란 $f(x) + I$, $(f(x), x(x-1)) = 1$꼴의 원소다. 따라서 그 개수는

$$7^2 - 7 - 7 + 1 = 36$$

□

별해 2. $\gcd(x, x-1) = 1$이다. $\mathbb{Z}_7[x]$는 유클리드 정역이므로 중국인의 나머지 정리에 의하여

$$\mathbb{Z}_7[x]/\langle x(x-1) \rangle \simeq \mathbb{Z}_7[x]/\langle x \rangle \times \mathbb{Z}_7/\langle x - 1 \rangle \simeq \mathbb{Z}_7^2$$

따라서 단원의 개수는 6^2이다. □

기출 2. 2019학년도 A3

다음과 같이 정의된 함수 $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$가 $(0,0)$에서 연속이 되도록 하는 자연수 n의 최솟값을 구하시오. [2점]

$$f(x,y)=\begin{cases} \frac{x^n y^n}{x^{30}+y^{30}}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

기출 *2.* $n \le 15$라고 가정하자.

$$f[t,t]=\frac{1}{2}t^{2n-30} \to \begin{cases} \frac{1}{2}, & n=15 \\ \infty, & n<15 \end{cases}$$

이제 $n=16$일 때 $f(0,y)=f(x,0)=0$이고, $xy\neq 0$이면

$$\frac{x^{16}y^{16}}{x^{30}+y^{30}} \le \frac{1}{2}|xy| \le \frac{x^2+y^2}{4}$$

샌드위치 정리에서, $\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} f(x,y)=0$. 곧 n의 최솟값은 16이다. □

별해. 매개화된 함수 $g_\theta(r)=f(r,\theta)_{\text{pol}}$에 대하여 극한

$$\lim_{r\to 0} g_\theta(r)=0$$

이 성립하고 그 수렴이 θ에 대하여 균등하면 된다.

$$g_\theta(r)=r^{2n-30}\frac{\cos^n\theta\sin^n\theta}{\cos^{30}\theta+\sin^{30}\theta}$$

따라서 $n>15$이고 이 경우 $\frac{\cos^n\theta\sin^n\theta}{\cos^{30}\theta+\sin^{30}\theta}$의 상은 콤팩트로 유계이기 때문에 그 수렴은 균등하다. 따라서 n의 최솟값은 16이다. □

기출 3. 2019학년도 A4

좌표평면에서 자연수 n에 대하여 영역 D_n이

$$D_n = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | (x-y)^2 + x^2 \le n\right\}$$

일 때, 다음 극한값을 구하시오.

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{D_n} e^{-\lfloor (x-y)^2+x^2 \rfloor} dxdy$$

(단, $\lfloor x \rfloor$는 x보다 크지 않은 최대 정수이다.) [2점]

기출 3. $I_n = \iint_{D_n} e^{-\lfloor (x-y)^2+x^2 \rfloor}\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$이라 하자. $x = u$, $y - x = v$로 치환하면, $\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = 1$. 따라서

$$\begin{aligned} I_n =& \iint_{u^2+v^2<n} e^{-\lfloor u^2+v^2 \rfloor}\,\mathrm{d}\,u\,\mathrm{d}\,v,\, u = r\cos\theta, v = r\sin\theta,\ 0 \le r,\ 0 \le \theta < 2\pi \\ =& 2\pi \int_0^{\sqrt{n}} e^{-\lfloor r^2 \rfloor} r\,\mathrm{d}\,r,\ s = r^2, \mathrm{d}\,s = 2r\,\mathrm{d}\,r \\ =& \pi \int_0^n e^{-\lfloor s \rfloor}\,\mathrm{d}\,s = \pi\left(e^{-0} + e^{-1} + e^{-2} + \cdots + e^{-(n-1)}\right) \end{aligned}$$

따라서

$$\lim_{n\to\infty} I_n = \frac{\pi}{1-e^{-1}} = \frac{e\pi}{e-1}$$

□

기출 4. 2019학년도 A5

복소평면에서 곡선 C가

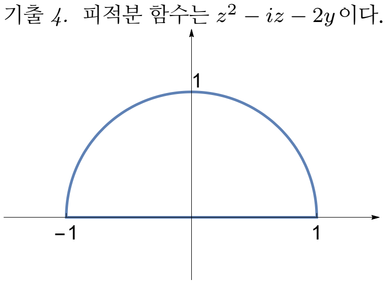
$$C: z(t) = \begin{cases} e^{i\pi t}, & 0 \le t \le 1 \\ t-2, & 1 < t \le 3 \end{cases}$$

일 때, 복소적분

$$\int_C (x^2 - y^2 - y) + i(2xy - x)\, \mathrm{d}\, z$$

의 값을 구하시오. (단, x, y는 실수이고 $z = x + iy$는 복소수이다.) [2점]

기출 4. 피적분 함수는 $z^2 - iz - 2y$이다. 적분 경로는 다음 그림과 같고 반시계 방향이다.



$I = \int_C z^2 - iz\, \mathrm{d}\, z$, $J = \int_C y\, \mathrm{d}\, x$, $K = \int_C y\, \mathrm{d}\, y$라 할 때

$$\int_C (x^2 - y^2 - y) + i(2xy - x)\, \mathrm{d}\, z = I - 2J + -2iK$$

이다. 코시 적분 정리에서 $I = 0$이고 닫힌 경로 적분으로 $K = 0$. 또한, 그린 정리에서 C로 둘러싸인 부분을 D라 할 때,

$$J = \int_D -\, \mathrm{d}\, A = -\frac{\pi}{2}$$

따라서

$$\int_C (x^2 - y^2 - y) + i(2xy - x)\, \mathrm{d}\, z = \pi$$

□

참고. 피적분 함수는 $z = x + iy$에서 $x = z - iy$를 대입하여

$$(x^2 - y^2 - y) + i(2xy - x) = z^2 - iz - 2y$$

로 계산할 수 있다. □

별해. 그린정리를 사용하여

$$\begin{aligned} &\int_C (x^2 - y^2 - y) + i(2xy - x)(\mathrm{d}\, x + i\, \mathrm{d}\, y) \\ =&\int_C P\, \mathrm{d}\, x + Q\, \mathrm{d}\, y,\ P = x^2 + 2ixy - ix - y^2 - y,\ Q = ix^2 - 2xy + x - iy^2 - iy \\ =&\int_D Q_x - P_y\, \mathrm{d}\, A,\ Q_x - P_y = 2 \\ =&\pi \end{aligned}$$

□

기출 5. 2019학년도 A6

3차원 유클리드 공간 $\mathbb{R}^3$ 에서 곡선 C 가

$$C = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | y = x^3 - ax + a,\ z = x - 1\right\}$$

일 때, 이 곡선의 비틀림률(열률, 꼬임률, torsion) τ 를 구하시오. 또한 점 $(1, 1, 0)$ 에서 곡선 C 의 곡률(curvature) 이 3 이 되도록 하는 a 의 값을 구하시오.(단, a 는 상수이다.) [2점]

기출 *5.* 이 곡선은 평면 $z = x - 1$ 상에 있으므로 그 열률은 0 이다.

이제 $\mathbf{r}(t) = \langle t, t^3 - at + a, t - 1\rangle$ 이라 하면, $\mathbf{v}(t) = \langle 1, 3t^2 - a, 1\rangle$, $\mathbf{a}(t) = \langle 0, 6t, 0\rangle$ 이다. 따라서 $v = \sqrt{2 + (3t^2 - a)^2}$.

이제 $t = 1$ 에서 $a_T = \left.\frac{\mathrm{d}\,v}{\mathrm{d}\,t}\right|_{t=1} = -\frac{6(a-3)}{\sqrt{(a-6)a+11}}$. 또, $a = 6$. 따라서 $a_N = \sqrt{a^2 - a_T^2} = \sqrt{\frac{72}{(a-6)a+11}}$. $\kappa = 3$ 이므로 $a_N = \kappa v^2$ 에서

$$\sqrt{\frac{72}{(a-6)a+11}} = 3\left(2 + (3-a)^2\right)$$

으를 풀면 $a = 3$을 얻는다. □

기출 6. 2019학년도 A7

두 개의 부품 ㉮와 ㉯로 구성된 시스템이 있다. 이 시스템의 수명은 작동을 시작한 후 두 부품 중 하나가 고장 날 때까지 걸리는 시간이다. 부품 ㉮가 고장 날 때까지 걸린 시간 X 와 부품 ㉯가 고장 날 때까지 걸린 시간 Y 는 서로 독립이고, 두 확률변수 X, Y 의 확률밀도함수는 각각

$$f_X(x) = \frac{1}{5}e^{-\frac{x}{5}} \qquad (x > 0)$$
$$f_Y(y) = \frac{1}{10}e^{-\frac{y}{10}} \qquad (y > 0)$$

이다. 이 시스템의 수명 Z 에 대하여 확률 $\mathrm{P}(Z > 10)$ 을 구하시오. [2점]

기출 *6.* $Z > 10$ 은 $X > 10$ 그리고 $Y > 10$ 과 같은 조건이다. 두 확률변수가 독립이므로

$$\mathrm{P}(Z > 10) = \mathrm{P}(X > 10 \wedge Y > 10) = \mathrm{P}(X > 10)\,\mathrm{P}(Y > 10)$$
$$= \int_{10}^{\infty} \frac{1}{5}e^{-\frac{x}{5}}\,\mathrm{d}\,x \int_{10}^{\infty} \frac{1}{10}e^{-\frac{y}{10}}\,\mathrm{d}\,y = \frac{1}{e^3}$$

□

기출 7. 2019학년도 A8

특정 프로젝트에 지원한 5명의 위원 A, B, C, D, E가 있다. 다음은 이 5명의 위원이 작업할 수 있는 요일을 각각 ○기호로 표시한 것이다. 이 프로젝트를 수행하기 위하여 5명의 위원 중 4명을 선발하여 서로 다른 요일에 배치하는 경우의 수를 구하시오. (단, 선발된 위원은 일주일 중 하루만 작업한다.) [2점]

요일 / 위원	월	화	수	목	금	토	일
A	○	○	○	○			
B	○		○				
C	○	○		○			
D					○	○	
E					○		○

기출 7. A, B, C는 월화수목, D, E는 금토일에 배치 가능하므로, 두 집단에 대하여 배치 요일은 서로 독립이다. 4명을 뽑아야 하므로 다섯 명 중에서 한 명을 제외하게 된다.

A,B,C세 명을 월화수목에 서로 다른 요일에 배치하는 방법은 B, C를 배치하면 A는 남은 두 요일 중 아무대나 배치 가능하기 때문에 $(2+3)\cdot 2 = 10$가지 가능.

A,B,C중 두 명을 월화수목에 서로 다른 요일에 배치하는 방법은 A를 제외할 경우 5가지. B제외한 경우는 C먼저 선택하고 A를 선택하면 9가지. C제외한 경우 B먼저 선택하고 A선택하면 6가지. 따라서 $5+9+6=20$.

D, E 두 명을 금토일에 배치하는 방법은 3가지.

둘 중 한 명을 제외하고 금토일에 배치하는 방법은 그저 동그라미 수인 4이다.

구하는 경우의 수는

$$10\cdot 4 + 20\cdot 3 = 100$$

□

기출 8. 2019학년도 A11

함수 $h:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$가

$$h(x)=\begin{cases}\int_0^1 \frac{x^2}{x^4+t^2}dt, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

일 때, 극한값 $\lim_{x\to 0} h(x)$를 풀이 과정과 함께 쓰시오. 또한 자연수 n에 대하여 함수 $h_n:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$가

$$h_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{nx^2}{n^2x^4+k^2}$$

일 때, $\mathbb{R}$에서 함수열 $\{h_n\}$이 h로 평등수렴(균등수렴, 고른수렴, uniform convergence)하는지를 판별하고 그 이유를 쓰시오. [4점]

기출 *8.* $x\neq 0$일 때,

$$\begin{aligned}h(x)&=\int_0^1\frac{x^2}{x^4+t^2}\,\mathrm{d}\,t,\ t=x^2\tan\theta,\ -\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2},\ \mathrm{d}\,t=x^2\sec^2\theta\,\mathrm{d}\,\theta\\&=\int_0^{\arctan\frac{1}{x^2}}\frac{x^2}{x^4\sec^2\theta}x^2\sec^2\theta\,\mathrm{d}\,\theta\\&=\arctan\frac{1}{x^2}\end{aligned}$$

따라서

$$\lim_{x\to 0}h(x)=\lim_{t\to\infty}\arctan t=\frac{\pi}{2}$$

이로부터 우리는 $h_n(x)$가 $h(x)$로 균등수렴 할 수 없음을 알 수 있다. 이를 보이기 위하여 $h_n(x)$가 $h(x)$로 균등수렴한다고 가정 해 보자. 그러면 각각의 $h_n(x)$가 연속이기 때문에 $h(x)$도 연속이어야 한다. 그런데 $h(x)$는 $x=0$에서 연속이 아니기 때문에 균등수렴이 아니다.

참고로 문제에서 구체적으로 요구하지는 않았지만, $h_n(x)$는 $h(x)$로 점별 수렴한다는 것을 보이자면, 먼저 $x=0$일 때는 $h_n(x)=h_n(0)=0=h(0)$. 이제 $x\neq 0$일 때는

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}h_n(x)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{nx^2}{n^2x^4+k^2},\ t_k=\frac{k}{n},\ \Delta t=\frac{1}{n}\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{x^2}{x^4+t_k^2}\Delta t=\int_0^1\frac{x^2}{x^4+t^2}\,\mathrm{d}\,t\\&=h(x)\end{aligned}$$

□

기출 9. 2019학년도 A12

실수 전체의 집합 $\mathbb{R}$ 위의 위상

$$\mathcal{T} = \left\{ U \subseteq \mathbb{R} | R - U \text{는 유한집합} \right\} \cup \{\emptyset\}$$

에 대하여, $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ 의 두 부분공간(subspace) $A = [0,1] \cup [2,3)$ 과 $B = \{3,4,5\}$ 의 위상을 각각 $\mathcal{T}_A$, $\mathcal{T}_B$ 라 하자. 집합 $X = A \cup B$ 에서 $\mathcal{T}_A \cup \mathcal{T}_B$ 를 기저(base, basis)로 하는 위상을 $\mathcal{T}'$ 이라 할 때, 위상공간 $(X, \mathcal{T}')$ 에서 집합 $C = \left\{ 3 - \frac{1}{n} \middle| n \in \mathbb{N} \right\} \cup \{3\}$ 의 경계(boundary) $b(C)$ 를 구하시오. 또한 $(X, \mathcal{T}')$ 이 컴팩트 공간(compact space) 임을 보이시오. (단, $[0,1] = \{x \in \mathbb{R} | 0 \le x \le 1\}$, $[2,3) = \{x \in \mathbb{R} | 2 \le x < 3\}$ 이고 $\mathbb{N}$은 자연수 전체의 집합이다.) [4점]

기출 *9.* X 의 임의의 열린 집합 U 에 대하여 어떤 A 와 B 의 $\mathcal{T}$ 상대 위상에 의한 열린 집합 E 와 F 가 존재하여 $U = E \cup F$ 이다. 이때 $E = A \vee |A \setminus E| < \infty$ 가 성립한다.

이제 C 의 경계를 생각하자. 우선 $a \in A$ 에 대하여 $a \in U = E \cap F$, $E \subseteq A$, $F \subseteq B$, $E \in \mathcal{T}_A$, $F \in \mathbf{T}_B$ 라 할 때, $a \in E$ 이므로 $E \neq \emptyset$ 인데 $\left\{3 - \frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}\right\} \subseteq A$ 가 무한집합이므로 E 와 C 는 서로소가 아니다. 마찬가지로 E 와 $A \setminus C$ 또한 서로소가 아니다. 따라서 a 는 ∂C 에 존재한다.

이제 $b \in B$ 에 대하여 $b = 3$ 이면 $\{3\}\,\mathcal{T}'$ 인데 $\{3\} \subseteq C$ 이므로 $3 \in \operatorname{int} C$ 이다. 또한 $\{4,5\} \in \mathcal{T}'$ 이고 $\{4,5\} \subseteq \operatorname{ext} C$ 이다. 따라서 $\operatorname{bd} C = A$ 임을 알 수 있다.

편의상, E, E_j 는 A 의 열린 집합, F, F_j 는 B 의 열린 집합을 나타내는 변수라 하자. $(j = 1, 2, 3, \ldots)$ 이제 X 의 임의의 열린 덮개 $\mathcal{O}$ 를 생각하자. 이것이 열린 덮개이기 때문에 어떤 $E \cup F \in \mathcal{O}$ 에 대하여 $E \neq \emptyset$ 이 성립한다. 따라서 $A \setminus E$ 는 유한집합으로 그 각각의 원소를 덥는 $E_j \cup F_j \in \mathcal{O}$, $j = 1, 2, \ldots, l-1$ 를 선택한다. 이제 3, 4, 5 각각을 덥는 $E_l \cup F_j$, $E_{l+1} \cup F_{l+1}$, $E_{l+2} \cup F_{j+2}$ 를 선택하면 유한 덮개

$$\{E \cup F, E_j \cup F_j | j = 1, 2, 3, \ldots, l+1\}$$

이 구성되었다. 따라서 X 는 콤팩트이다. □

기출 10. 2019학년도 A13

3차원 유클리드 내적 공간 $\mathbb{R}^3$의 세 벡터 $\boldsymbol{v}_1 = (1,0,0)$, $\boldsymbol{v}_2 = (1,1,1)$, $\boldsymbol{v}_3 = (0,-1,1)$에 대하여, 두 벡터 $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$로 생성된 부분공간을 $W_{1,2}$라 하고 두 벡터 $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_3$으로 생성된 부분공간을 $W_{1,3}$이라 하자. $\mathbb{R}^3$의 벡터 $\boldsymbol{u}$에 대하여 부분공간 W 위로의 $\boldsymbol{u}$의 정사영(orthogonal projection)을 $\mathrm{proj}_W\, \boldsymbol{u}$라 하고, 실수 k에 대하여 선형변환 $T_k : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$을

$$T_k(\boldsymbol{u}) = \mathrm{proj}_{W_{12}}\, \boldsymbol{u} + \mathrm{proj}_{W_{13}}\, \boldsymbol{u} + k\boldsymbol{u}$$

로 정의하자. T_k의 역변환(inverse transformation)이 존재하지 않도록 하는 모든 k의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. 또한 T_k의 랭크(계수, 계급수, 유효차수, rank)가 2인 k의 값을 구하시오. (단, 두 벡터 $\boldsymbol{u}_1(a_1,a_2,a_3)$, $\boldsymbol{u}_2(b_1,b_2,b_3)$의 유클리드 내적은 $\boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{u}_2 = \sum_{i=1}^{e} a_i b_i$이다.) [4점]

기출 *10.* $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)$에 그람-슈미트 과정을 적용하면

$$\boldsymbol{v}_2' = \boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_2 \cdot \boldsymbol{v}_1 \boldsymbol{v}_1 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

에 대하여 $(\mathbf{v}_1, \boldsymbol{v}_2')$를 얻는다. 따라서 $\boldsymbol{u} = (x,y,z)$에 대하여

$$\mathrm{proj}_{W_{12}}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}_1 \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}_2' \boldsymbol{v}_2' = \left(x, \frac{y+z}{2}, \frac{y+z}{2}\right)$$

마찬가지로 $\boldsymbol{v}_3' = \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$일 때

$$\mathrm{proj}_{W_{13}}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}_1 \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}_3' \boldsymbol{v}_3' = \left(x, \frac{y-z}{2}, \frac{-y+z}{2}\right)$$

따라서

$$T_k(\boldsymbol{u}) = (2x, y, z) + k\boldsymbol{u}$$

변환 T_k의 표현행렬은 대각성분만 $2+k, 1+k, 1+k$인 것이다. 따라서 역변환이 존재하지 않기 위해서는 $k=-1$또는 $k=-2$이다.

이 행렬은 대각행렬이므로 그 랭크는 대각선 성분 중 영이 아닌 것의 개수다. 따라서 랭크 2 인 경우의 k값은 -2이다. □

기출 11. 2019학년도 A14

G는 위수(order)가 150인 군(group)이다. 위수가 6인 G의 부분군(subgroup)이 유일하게 존재할 때, 위수가 30인 G의 부분군이 존재함을 보이시오.

11. 위수가 6인 부분군 K가 유일하기 때문에 $K \lhd G$이다. 또한 $5|150$이므로 위수 5인 부분군 H가 존재한다.
제 2 동형정리에서

$$HK/K \simeq H/(K \cap H)$$

그런데 K와 H의 위수는 서로소이므로 $K \cap H = \{e\}$. 따라서

$$|HK| = 30$$

따라서 HK가 위수 30인 부분군이다. □

2 2019 B

기출 12. 2019학년도 B2

어느 지역 고등학생들의 몸무게(kg)는 정규분포 $N(\mu, 9^2)$을 따른다고 한다. 이 지역의 고등학생 중에서 임의로 추출한 36명의 몸무게에 대한 표본평균을 $\overline{X}$라 하자.

$$\mathrm{P}\left(\left|\overline{X}-\mu\right| > c\right) = 0.1$$

을 만족시키는 상수 c의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. 또한 36명의 표본으로부터 관측된 표본평균의 값이 60일 때, 모평균 μ에 대한 90% 신뢰구간(confidence interval)을 풀이 과정과 함께 쓰시오. (단, 표준정규분포를 따르는 확률변수 Z에 대하여 $\mathrm{P}(Z < 1.64) = 0.95$이고, 모평균에 대한 신뢰구간은 양면신뢰구간(two-sided confidence interval)을 의미한다.) [4점]

기출 *12.* 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(\mu, \frac{9^2}{36}\right)$를 따른다. 따라서 표준화 변수 Z는

$$Z = \frac{\overline{X}-\mu}{\frac{3}{2}}$$

로 나타난다. 이는 $\overline{X} = \frac{3}{2}Z + \mu$임을 뜻하고 곧

$$\mathrm{P}\left(\left|\overline{X}-\mu\right| > c\right) = \mathrm{P}\left(|Z| > \frac{2}{3}c\right) = 0.1$$

을 풀게 된다. 곧,

$$\mathrm{P}\left(|Z| < \frac{2}{3}c\right) = 0.95$$

와 같은 방정식이니 $c = 2.46$을 얻는다.

이 때,

$$\mathrm{P}\left(\left|\overline{X}-\mu\right| < c\right) = 90\%$$

이므로 모평균 μ에 대한 90% 신뢰구간은

$$[57.54, 62.46]$$

이다. □

기출 13. 2019학년도 B3

자연수 m에 대하여 집합 T_m을

$$T_m = \left\{a \in \mathbb{N} | a^{\phi(8m)} \equiv 1 \pmod{8m},\ 1 \le a \le 8m\right\}$$

으로 정의할 때, 집합 T_m의 원소의 개수가 $4\phi(m)$이 되도록 하는 100이하의 자연수 m의 개수를 풀이 과정과 함께 쓰시오. (단, $\mathbb{N}$은 자연수 전체의 집합이고, $\phi(n)$ $(n \in \mathbb{N})$은 n이하의 자연수 중에서 n과 서로소인 수의 개수로 정의되는 오일러 ϕ-함수이다.) [4점]

---

13. 자연수 m에 대하여 만일 $(a, 8m) = 1$이라면 $a^{\phi(8m)} \equiv 1 \pmod{8m}$이다. 역으로 $a^{\phi(8m)} \equiv 1 \pmod{8m}$이라면 $(a, 8m) = 1$이다. 따라서 T_m의 원소의 개수는 $\phi(8m)$이다.

이제 $m = 2^t M$, $2^t \| m$, $2 \nmid M$이라 하자. 그러면 $\phi(8m) = \phi\left(2^{t+3}M\right) = 2^{t+2}\phi(M)$. 이것이 $4\phi(m)$과 같다면

$$\phi(m) = \phi\left(2^t M\right) = 2^t \phi(M)$$

곧, $t = 0$으로 m이 홀수인 조건이 된다. 따라서 이를 만족하는 100이하의 자연수 m의 개수는 50이다. □

기출 14. 2019학년도 B4

실숫값을 갖는 두 함수

$$u(x,y),v(x,y)=e^{-y}(x\cos x-y\sin x)$$

와 복소수 $z=x+iy$ (x,y 는 실수) 에 대하여, $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 가 정함수(entire function)이다. 곡선 C 가 $x=\cos t$, $y=\sin t$ $(0\le t\le 2\pi)$ 로 정의된 원일 때,

$$\int_C -yu(x,y)dx+xu(x,y)dy=6\pi$$

이다. $f(0)$ 의 값과 함수 $u(x,y)$ 를 각각 풀이 과정과 함께 쓰시오. [4점]

※ 다음 정리는 필요하면 증명 없이 사용할 수 있다.

복소평면의 열린 집합 D 에서 해석적인 함수 $f:D\longrightarrow\mathbb{C}$ 에 대하여, $r>0$ 이고 $\{z\in\mathbb{C}\,|\,|z-z_0|\le r\}\subset D$ 이면

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f\left(z_0+re^{it}\right)dt$$

---

14. 코시 리만 방정식에서

$$u_x=v_y=e^{-y}((y-1)\sin(x)-x\cos(x))$$

곧

$$u=e^{-y}(-y\cos(x)-x\sin(x))+g(y)$$

$u_y+v_x=g'(y)$ 이므로 $g(y)=g$ 로 상수다.

$$\int_C -yu(x,y)dx+xu(x,y)dy=\int_C u\,\mathrm{d}\,t=6\pi$$

주어진 정리에서

$$\int_C u\,\mathrm{d}\,\theta+i\int_C v\,\mathrm{d}\,t=2\pi g$$

그런데 g 는 실수이므로 $6\pi=2\pi g$, 곧, $g=3$ 이다. 따라서 $f(0)=3$, $u(x,y)=e^{-y}(-y\cos(x)-x\sin(x))+3$ 이다. □

기출 15. 2019학년도 B5

3차원 유클리드 공간 $\mathbb{R}^3$에서 곡면 $M : z = \frac{1}{4}\left(x^4 + y^4\right)$과 평면 $H : x + y - z = d$가 한 점 p에서 접할 때, 상수 d의 값을 구하시오. 또한 접점 p에서 곡면 M의 가우스곡률(Gaussian curvature) K의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. [4점]

---

15. $g(x,y,z) = \frac{x^4+y^4}{4} - z$라 하자. 접점에서 $\nabla g = \left\langle x^3, y^3 - 1\right\rangle \parallel \langle 1, 1, -1\rangle$이다. 따라서 접점에서 $x = y = 1$, $z = \frac{1}{2}$. 곧, $d = \frac{3}{2}$.

이제 좌표조각 $\mathbf{x} = \left\langle x, y, \frac{x^4+y^4}{4}\right\rangle$에 대하여, $\mathbf{x}_x = \left\langle 1, 0, x^3\right\rangle$, $\mathbf{x}_y = \left\langle 0, 1, y^3\right\rangle$, $U = \frac{1}{W}\left(\mathbf{x}_x \times \mathbf{x}_y\right)$, $W = \sqrt{1 + x^6 + y^6}$. $E = \mathbf{x}_x \cdot \mathbf{x}_x = 1 + x^6$, $F = \mathbf{x}_x \cdot \mathbf{x}_y = x^3y^3$, $G = \mathbf{x}_y \cdot \mathbf{x}_y = 1 + y^6$. $\mathbf{x}_{xx} = \left\langle 0, 0, 3x^2\right\rangle$, $\mathbf{x}_{xy} = 0$, $\mathbf{x}_{yy} = \left\langle 0, 0, 3y^2\right\rangle$. $L = \mathbf{x}_{xx} \cdot U = \frac{3x^2}{W}$, $M = 0$, $N = \frac{3y^2}{W}$.

$$G = \frac{LN - M^2}{W^2} = \frac{9x^2y^2}{\left(1 + x^6 + y^6\right)^2} = 1$$

□

기출 16. 2019학년도 B6

유리수체 $\mathbb{Q}$ 위에서 대수적인 두 실수 a, b에 대하여 단순 확대체(simple extension) $K = \mathbb{Q}(a+bi)$가 $\mathbb{Q}$ 위의 갈루아 확대체(정규 확대체, Galois extension field, normal extension field)이고 갈루아군(Galois group) $G(K/\mathbb{Q})$가 아벨군(abelian group)이라 하자. $a^2+b^2 \in \mathbb{Q}$이고 $b \neq 0$일 때, $G(K/\mathbb{Q})$의 위수(order)는 짝수임을 보이시오. 또한 $G(K/\mathbb{Q})$의 위수를 $2m$이라 할 때, 자연수 m의 각각의 양의 약수 d에 대하여 $\mathbb{Q}[z]$에 속하고 모든 근이 실수이며 차수가 d인, $\mathbb{Q}$ 위의 기약다항식(irreducible polynomial)이 존재함을 보이시오. (단, $i = \sqrt{-1}$이고 $\mathbb{Q}[x]$는 $\mathbb{Q}$ 위의 다항식환(polynomial ring)이다.) [5점]

---

16. 복소수 $a+bi$의 유리계수 최소 다항식을 $f(x)$라 하자. K가 갈루아 확대체 이므로 $f(x)$의 모든 근을 포함한다. 따라서 $a-bi \in K$. 따라서 $a \in K$이다. 곧, $E = \mathbb{Q}(a)$라 할 때, $K - E - \mathbb{Q}$는 중간체이다. 또한, $b \neq 0$이고 $E \subseteq \mathbb{R}$이므로 $x^2 - 2ax + a^2 + b^2 \in E[x]$가 $E[x]$ 위에서 기약이며 따라서 K는 E 위에 2차 확장체다.

$$|G(K/\mathbb{Q})| = [K:\mathbb{Q}] = [K:E]\cdot[E:\mathbb{Q}]$$

이므로 $[E:\mathbb{Q}] = m$이라 할 때 $|G(K/\mathbb{Q})| = 2m$이다.

$G(K/\mathbb{Q})$가 가환이므로 $G(E/\mathbb{Q})$도 가환이다. 따라서 $G(E/\mathbb{Q})$에 라그랑주 정리의 역이 성립하여 임의의 $d|m$에 대하여 위수 d인 부분군이 존재한다.

$d|m$에 대하여 위수 m/d인 부분군을 H라 하면 E의 부분체로 H에 대한 고정체를 F라 할 때 $[F:\mathbb{Q}] = d$이고 표수 0에서 $F = \mathbb{Q}(\alpha)$이므로 $\mathrm{Irr}(\alpha, \mathbb{Q})$는 정확히 d개의 실근을 가지는 d차 다항식일 뿐 아니라 그 근은 모두 $E \subseteq K$에 있다. □

별해. 임의의 양의 정수 d에 대하여 $\mathbb{Q}[x]$에 속하고 d개의 실근을 가지는 기약다항식이 존재함을 보이자.

다항식 $p_d(x)$를

$$p_d(x) = x(x-2)(x-4)\cdots(x-2d+2)$$

로 정의하자. 충분히 큰 홀수 m이 존재하여 $p_d(x) = \frac{2}{m}$은 d개 실수해를 가진다. 이제 다항식 $r_d(x)$를 $r_d(x) = bp_d(x) - 2$라 하면 r_d가 아이젠슈타인 판정법에 의하여 조건을 만족한다. □

기출 17. 2019학년도 B7

실수열 $\{a_n\}$을

$$a_1 = 1,\ a_{n+1} = \left(2a_n^2 + 1\right)^{\frac{1}{5}} \quad (n \geq 1)$$

로 정의하자. 모든 자연수 n에 대하여 $1 \leq a_n \leq 2$임을 보이고, 수열 $\{a_n\}$이 수렴함을 보이시오. [5점]

17. 모든 자연수 n에 대하여 $1 \leq a_n \leq 2$이다. 이것을 수학적 귀납법으로 증명하자. 먼저 $n = 1$일 때는 $a_1 = 1$이므로 성립한다. 이제 $n = k$일 때 성립했다고 가정하자. $f(x) = \left(2x^2 + a\right)^{\frac{1}{5}}$라 하면 $f(x)$는 $0 \leq x$에서 증가함수다.

$$1 = f(0) < f(1) \leq fa_k = a_{k+1} = f(a_k) \leq f(2) < f\left(\sqrt{\frac{31}{2}}\right) = 2$$

따라서 수학적 귀납법에 의하여 $1 \leq a_n \leq 2$가 임의의 자연수 n에 대하여 성립한다.

$a_2 = 3^{\frac{1}{5}} > a_1$이다. 이제 어떤 k에 대하여 $a_k > a_{k-1}$이라고 가정해 보자. 그러면

$$a_{k+1} = f(a_k) > f(a_{k-1}) = a_k$$

가 성립한다. 따라서 $\{a_n\}$은 증가수열이다.

$\{a_n\}$은 증가하며 위로 유계이므로 수렴한다. □